Ponavljanje srednjoškolskog gradiva

Sadržaj

1 Potencije **3**
1.1 Zadatci 4

2 Kvadratne jednadžbe **9**
2.1 Zadatci 10

3 Iracionalne jednadžbe **14**
3.1 Zadatci 14

4 Algebarske jednadžbe višeg reda **16**

5 Polinomi **18**
5.1 Dijeljenje polinoma 19
5.2 Rastavljanje polinoma na faktore 20

6 Kvadratne nejednadžbe **21**

7 Funkcija **28**
7.1 Realne funkcije realne varijable 29
7.2 Parnost i neparnost 29

8 Eksponencijalne i logaritamske funkcije **32**
8.1 Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ 32
8.2 Zadatci: 34
8.3 Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$ 36
8.4 Zadatci 39

9 Trigonometrijske funkcije **41**
9.1 Trigonometrijska kružnica 44
9.2 Sinus $\sin x$ 45
9.3 Kosinus $\cos x$ 46

9.4 Tangens $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 47
9.5 Kotangens $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 48
9.6 Zadatci 49

10 Transformacije nad grafovima funkcija **53**
10.1 Horizontalna translacija 53
10.2 Vertikalna translacija 55
10.3 Skaliranje u smjeru osi y 57
10.4 Skaliranje u smjeru osi x 59
10.5 Zrcaljenje obzirom na os x 61
10.6 Zrcaljenje obzirom na os y 62
10.7 Zadatci 63

11 Apsolutna vrijednost realnog broja **66**
11.1 Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima 67
11.2 Zadatci 67

12 Pravac **69**
12.1 Zadatci 70

1 Potencije

Za $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ te $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Gornja pravila vrijede i za $m, n \in \mathbb{R}$ pod uvjetom da je $a, b \in \mathbb{R}^+$, gdje je $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ za $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^+$

KVADRATI BINOMA, RAZLIKA KVADRATA

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (kvadrat zbroja)
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (kvadrat razlike)
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (razlika kvadrata)

KUB BINOMA, RAZLIKA I ZBROJ KUBOVA

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (kub zbroja)
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (kub razlike)
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (razlika kubova)
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (zbroj kubova)

1.1 Zadatci

1. Izračunajte:

   (a) $(a^3)^{6n} + (a^{9n})^2 - (a^{6n})^3$

   (b) $(2^{n+1} + 2^m)^2$.

2. Skratite razlomak $\dfrac{a^3 + b^3}{a^4 - b^4}$.

3. Skratite razlomak $\dfrac{a^3 - 1}{a^4 + a^2 + 1}$.

4. Pojednostavite sljedeće izraze:

   (a) $\dfrac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$.

   (b) $\dfrac{2xy + 2y^2}{12x - 6y} : \dfrac{4x^2 - 4y^2}{16x^2 - 4y^2}$.

   (c) $\dfrac{42x^3y^2z^2}{35a^2bc} \cdot \dfrac{25abc}{21xyz}$.

(d) $\left((\frac{a}{b}-1)^2+\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a+b}{b}$.

5. Izračunajte $\frac{9x}{x^3-27}+\frac{x-3}{x^2+3x+9}-\frac{1}{x-3}$.

6. Izračunajte $\frac{25x^2-30xy+9y^2}{9x^2+12xy+4y^2}:\frac{25x^2-9y^2}{9x^2-4y^2}$.

7. Izračunajte $\frac{x^3-1}{x^3+8}:\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$.

8. Izračunajte $\frac{2a}{x^2-4x+4}+\frac{4a}{x^2-4}+\frac{a}{x+2}$.

9. Skratite razlomak $\frac{b^{2x+y}+b^{x+2y}+b^{x+y+2}}{b^{2x-y}+b^{x}+b^{x-y+2}}$.

10. Izračunajte $[(\frac{1}{x^2}-1)^{-1}:(\frac{1-x}{x})^{-2}]^{-2}$.

11. Izračunajte:

    (a) $\sqrt[4]{16a^{-12}b^{-8}}$

    (b) $\sqrt[5]{-32a^5b^{10}}$.

12. Racionalizirajte nazivnik $\dfrac{5\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{7}}$.

13. Izračunajte $\left(\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}-\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}}\right)^2$.

14. Izračunajte $\sqrt[4]{a^2b^3x^3} : \sqrt[6]{a^3b^2x^4}$.

15. Izračunajte $\sqrt{z} : \sqrt[3]{z^2} \cdot \sqrt[6]{z^5}$.

16. Izračunajte

(a) $(x-y):(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

(b) $(a+b):(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$.

2 Kvadratne jednadžbe

Jednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c = 0$$

naziva se kvadratna jednadžba. Brojevi $a, b, c \in \mathbb{R}$ zovu se koeficijenti jednadžbe, pri čemu je a vodeći koeficijent, $a \neq 0$, dok je c slobodni član.

Rješenja kvadratne jednadžbe su dana s

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Realni broj $D = b^2 - 4ac$ naziva se diskriminanta. U ovisnosti o vrijednosti diskriminante tri su moguća tipa rješenja kvadratne jednadžbe:

1. $D > 0$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ (dva različita realna rješenja)
2. $D = 0$ $\quad x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ (dvostruko realno rješenje)
3. $D < 0$ $\quad x_1 = u + v\mathrm{i}, \quad x_2 = u - v\mathrm{i}, \quad a, b \in \mathbb{R}$ (par konjugirano kompleksnih rješenja).

   Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{z |\ z = u + v\mathrm{i}, \quad u, v \in \mathbb{R}\},\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

VIÈTEOVE FORMULE

Za rješenja kvadratne jednadžbe vrijedi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2.1 Zadatci

1. Riješite u skupu $\mathbb{C}$ sljedeće jednadžbe:

   (a) $4x^2 - 25 = 0$

   (b) $x^2 + 5x = 0$

   (c) $9x^2 - 12x - 23 = 0$

   (d) $2x^2 - 2x + 5 = 0$

   (e) $\dfrac{4}{x+2} = x - 2.$

(f) $\dfrac{x+1}{2x+6} - \dfrac{2x}{3-x} = \dfrac{9(x+5)}{2x^2-18}$.

2. Ne rješavajući jednadžbu $3x^2 - x - 4 = 0$ odredite vrijednost sljedećih izraza (x_1 i x_2 su rješenja te jednadžbe):

   (a) $x_1 + x_2$

   (b) $x_1 \cdot x_2$

   (c) $x_1^2 + x_2^2$

   (d) $x_1^3 + x_2^3$.

3. Riješite jednadžbu $x^2 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^2 = 17$.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$x^2 + 4y^2 = 20$$
$$3x^2 - y^2 = 47.$$

5. Riješite sustav jednadžbi

$$xy = 16$$
$$x - 3\sqrt{xy} - 2y = 2.$$

6. Riješite sustav jednadžbi

$$x + xy^2 = 4$$
$$x^2y^2 = 4.$$

3 Iracionalne jednadžbe

3.1 Zadatci

1. Riješite jednadžbu $\sqrt{4-3x} : \sqrt{5x+9} = 2 : 3$.

2. Riješite jednadžbu $2 + \sqrt{x-16} = \sqrt{x}$

3. Riješite jednadžbu $2x + \sqrt{4x^2 - 5x + 3} = 7$.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} xy &= 16 \\ x - 3\sqrt{xy} - 2y &= 2. \end{aligned}$$

4 Algebarske jednadžbe višeg reda

Zadatak. Riješite jednadžbe:

1. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

2. $x^3 + 21x^2 + 21x + 1 = 0$.

3. $27x^3 + 105x^2 - 175x - 125 = 0$.

4. $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32 = 0$.

5 Polinomi

Funkciju $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdje je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, te $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, nazivamo **polinomom**. Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma p, a_n je vodeći koeficijent i a_0 slobodni član.

Ako je $a_n \neq 0$, tada je p polinom n-tog stupnja. Polinom n-tog stupnja ima točno n kompleksnih nultočaka brojeći njihove kratnosti. Pritom kompleksne nultočke dolaze kao parovi konjugirano kompleksnih brojeva, tj. ako je $a + b\mathrm{i}$ nultočka, onda je $a - b\mathrm{i}$ također nultočka, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Ako je c nultočka od p, onda je polinom p djeljiv polinomom $g(x) = x - c$ tj.

$$p(x) = (x - c)\cdot h(x)$$

gdje je stupanj polinoma h jednak $n - 1$.

Zadatci. Odredite stupanj i nultočke sljedećih polinoma.

1. $p(x) = 7(x-3)^2(x+5)$

2. $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

3. $p(x) = x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$

5.1 Dijeljenje polinoma

Zadatci:

1. Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^5+x^2$ polinomom $g(x) = x^3 + x + 1$.

2. Nađite količnik pri dijeljenju polinoma $f(x) = 2x^6 - 7x^5 - 9x^4 - 4x$ polinomom $g(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$.

5.2 Rastavljanje polinoma na faktore

Ako polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ s cjelobrojnim koeficijentima ima cjelobrojnu nultočku c, tada je c djelitelj slobodnog člana a_0.

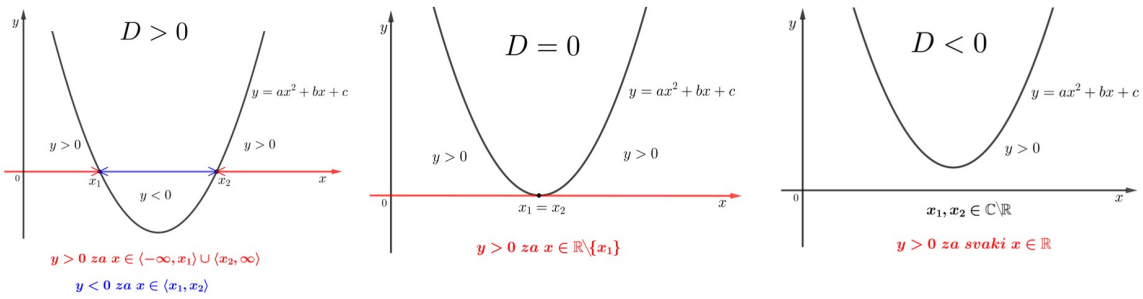
Zadatak: Rastavite polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ na realne faktore.

6 Kvadratne nejednadžbe

Polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ drugog stupnja zove se **kvadratna funkcija**.
Graf ovog polinoma je parabola s tjemenom $T\Big(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\Big)$.

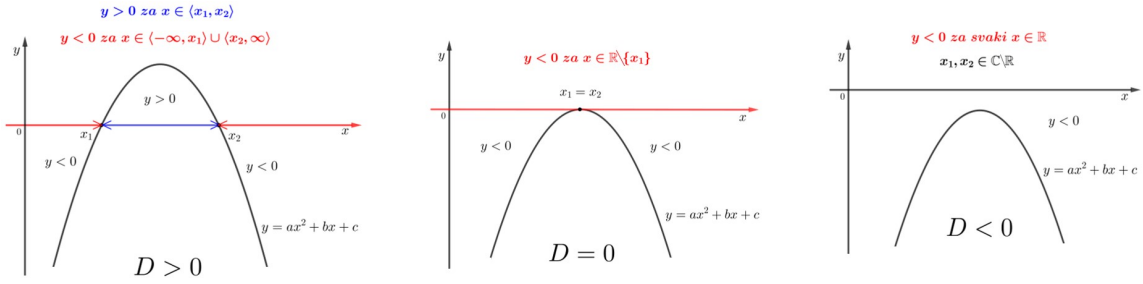
Rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ su $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, gdje je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta.

Ako je $a > 0$, onda prabola ima otvor prema gore.



Slika 1: $y = ax^2 + bx + c$, za $a > 0$

Ako je $a < 0$, onda prabola ima otvor prema dolje.



Slika 2: $y = ax^2 + bx + c$, za $a < 0$

Zadatci:

1. Riješite kvadratne nejednadžbe:

   a) $x^2 - 5x + 4 < 0$

   b) $-x^2 - 2x + 3 \leq 0$

   c) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$

   d) $-x(x-1) \geq 1$.

2. Riješite nejednadžbu $\dfrac{x-1}{4-2x} \geq 0$.

3. Riješite nejednadžbu $\dfrac{x-2}{(x-1)(x+3)} \leq 0$.

4. Riješite nejednadžbu $\dfrac{2x-1}{2x-x^2} < 0$.

5. Riješite nejednadžbu $\dfrac{4x-x^2}{x^2-x-2} \leq 0$.

6. Riješite nejednadžbu $\dfrac{x-5}{-x^2+3x-5} \leq 0.$

7. Riješite sustav nejednadžbi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-2x > 0. \end{cases}$

8. Riješite sustav nejednadžbi $\begin{cases} 4x - x^2 > 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 > 0. \end{cases}$

9. Riješite nejednadžbu $\dfrac{2x}{x-1} \geq 2$.

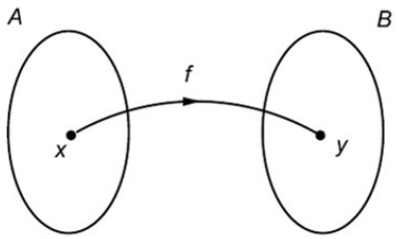
10. Riješite nejednadžbu $2x - 1 < \dfrac{1}{x}$.

11. Nađite skup rješenje nejednadžbe $(x+1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

7 Funkcija

Neka su A i B neprazni skupovi. **Funkcija** f sa skupa A u skup B je pravilo po kojem se svakom skupu $x \in A$ prodružuje točno jedan element skupa $y \in B$.

Ako je f funkcija sa skupa A u B, pišemo $f\colon A \to B$.



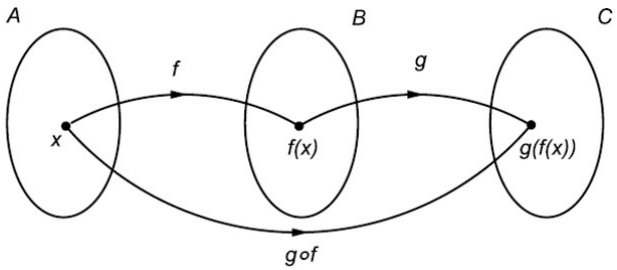
Slika 3: $f\colon A \to B$

Element x nazivamo argument, a $y = f(x)$ slika elementa x.

Skup A zove se **područje definicije** ili domena preslikavanja f, a skup B **područje vrijednosti** ili kodomena preslikavanja f. Za domenu funkcije f koristimo oznaku $\mathcal{D}(f)$.

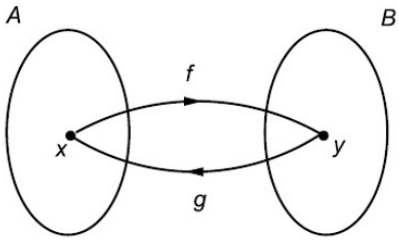
Skup $Im(f) = \{f(x)\colon x \in A\}$ zovemo slikom funkcije f.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, te neka su dane funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$. **Kompozicija funkcija** f i g je funkcija $g \circ f\colon A \to C$ definirana s $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ za sve $x \in A$.



Slika 4: Kompozicija funkcija f i g

Neka su A i B neprazni skupovi, te $f\colon A \to B$ dana funkcija. Kažemo da je $g\colon B \to A$ **inverzna funkcija** od f ako je $(g \circ f)(x) = x$ za sve $x \in A$ i $(f \circ g)(y) = y$ za sve $y \in B$. Inverznu funkciju funkcije f označavamo s f^{-1}.



Slika 5: $g = f^{-1}$ je inverzna funkcija od f, $f^{-1}\colon B \to A$

7.1 Realne funkcije realne varijable

Funkciju f čija domena i kodomena su podskupovi skupa realnih brojeva zovemo **realnom funkcijom realne varijable.**

Obično pišemo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iako domena funkcije f ne mora biti cijeli skup $\mathbb{R}$, nego skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x)$ dobro definiran.

Npr., ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tada je prirodna domena funkcije f skup $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

7.2 Parnost i neparnost

Funkcija f je **parna** ako iz $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $-x \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi $f(-x) = f(x)$ za sve $x \in \mathcal{D}(f)$.

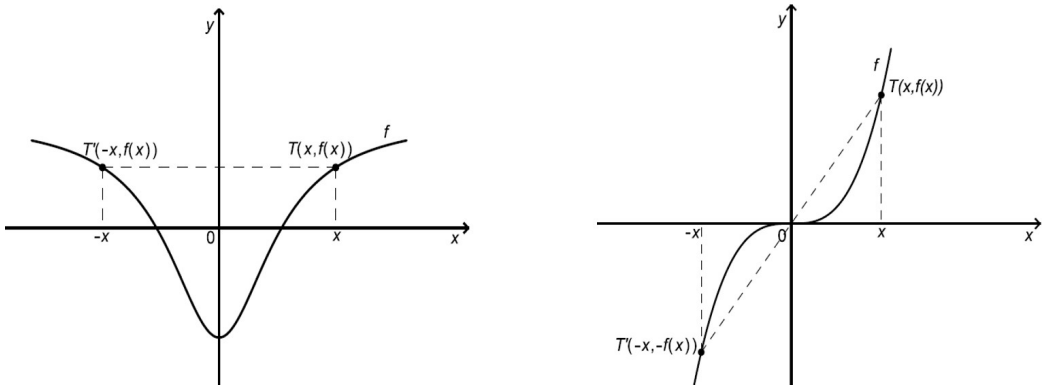
Graf parne funkcije je simetrična s obzirom na os y, (slika 6, lijevo).

Funkcija f je **neparna** ako iz $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $-x \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in \mathcal{D}(f)$.

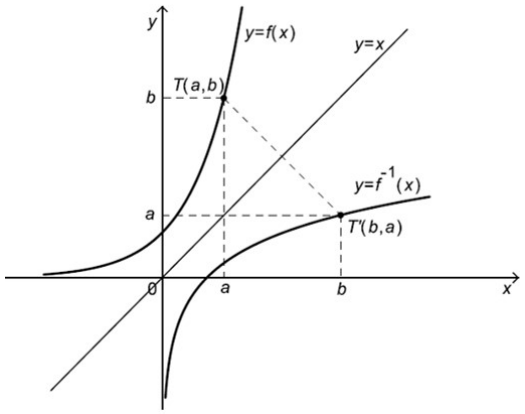
Graf neparne funkcije je centralno simetrična s obzirom na ishodište (slika 6, desno).

Neka je f^{-1} inverzna funkciji f. Graf od f^{-1} je simetričan grafu od f s obzirom na pravac $y = x$ (slika 7).

Točka $c \in \mathcal{D}(f)$ je **nultočka** od f ako je $f(c) = 0$.



Slika 6: Graf parne funkcije (lijevo) i neparne (desno)



Slika 7: Grafovi funkcija f i f^{-1}

Zadatci:

1. Ako je $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x + 3$ nađite $f \circ g$, $g \circ f$.

2. Ako je $g(x) = 1 - x^2$ i $(f \circ g)(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2} (x \neq 0)$, nađite $f(\dfrac{1}{2})$.

3. Odredite koje su od danih funkcija parne, koje neparne, a koje nisu niti parne niti naparne.

   (a) $f(x) = \dfrac{a^{2x} - 1}{a^x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$

   (c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 3}{x - 3}\right)$

   (d) $f(x) = \sin(\cos x)$

8 Eksponencijalne i logaritamske funkcije

8.1 Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$

Ukoliko se varijabla funkcije javlja se u eksponentu, primjerice $f(t) = 3^t$ ili $g(s) = 7^s, h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, govorimo o eksponencijalnoj funkciji. Pritom zahtijevamo da je baza pozitivna kako bismo izbjegli imaginarne brojeve poput $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$.

Eksponencijalna funkcija *je svaka funkcija oblika*

$$f(x) = a^x, \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

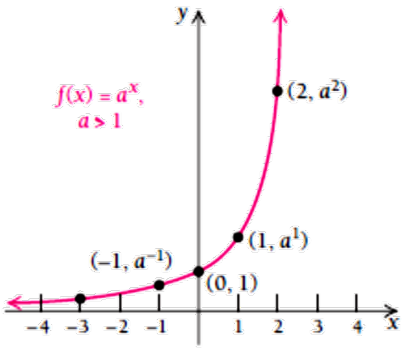
definirana za svaki realni broj x. Konstantu a nazivamo bazom funkcije.

- Područje definicije eksponencijalne funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$.
- Skup vrijednosti eksponencijalne funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$.
- Eksponencijalna funkcija nema nultočki.

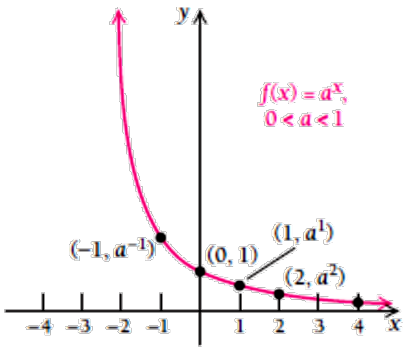
Graf eksponencijalne funkcije

Ovisno o vrijednosti baze razlikujemo dva slučaja:

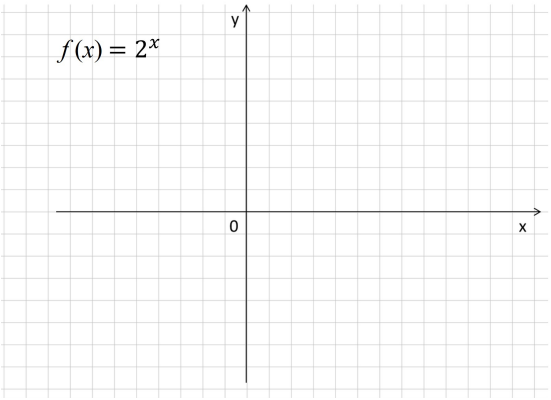
$I.$ $a > 1$

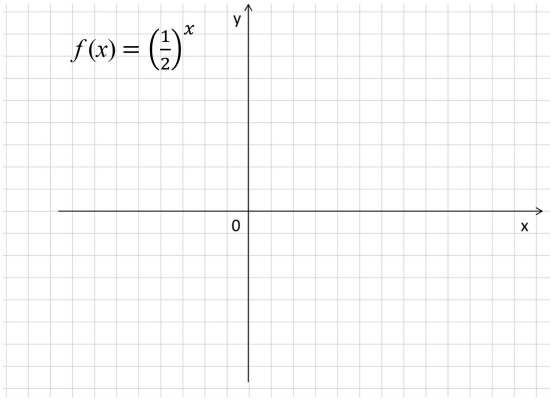


$II.$ $0 < a < 1$



Primjer. Nacrtajte garafove sljedećih funkcija:





Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije i njezinog grafa

1. Funkcija $y = a^x$ raste za $a > 1$ i pada za $0 < a < 1$.
2. Graf funkcije $y = a^x$ siječe os y u točki $(0, 1)$.
3. Za $f(x) = a^x$ vrijedi
$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \quad Im(f) = (0, +\infty), \quad \mathcal{N}(f) = \emptyset.$$
4. Funkcija $f(x) = a^x$ je bijekcija.
5. *Svojstvo injektivnosti eksponencijalne funkcije*.
Funkcija $f(x) = a^x$ je injektivna, tj. iz $a^{x_1} = a^{x_2}$ slijedi $x_1 = x_2$.

Matematička konstanta e Uz broj π u brojnim prirodnim zakonima ističe se u matematici još jedan iracionalan i transcedentan broj, broj e. Matematička konstanta e nazvana još i Eulerov broj ili Napierova konstanta je baza prirodnog logaritma i njegova približna vrijednost iznosti

$$e = 2,7182818284590...$$

Oznaku e uveo je švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. godine. Funkcija oblika $f(x) = e^x$ naziva se *eksponencijalna funkcija uz bazu* e.

8.2 Zadatci:

Riješite sljedeće jednadžbe:

1. $0,1^x = 100$

2. $0,2^{2x-3} = 5$

3. $4^{3x+2} = 64 \cdot 2^{2x-4}$

4. $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$

5. $3^x + 3^{x+1} = 2^{x+2}$

6. $2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} - 16 = 0$

7. $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

8.3 Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$

Logaritamska funkcija *s realnom bazom a je funkcija oblika*

$$f(x) = \log_a x, \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

Konstantu a nazivamo bazom funkcije.

- Područje definicije, domena logaritamske funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$.
- Skup vrijednosti, slika logaritamske funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.
- Logaritamske funkcije imaju nultočku za $x_0 = 1$ i to je točka $(1, 0)$.
- Logaritamska funkcija s bazom a i eksponencijalna funkcija s istom bazom a međusobno su inverzne funkcije. Naime, za $a > 0$ i $a \neq 1$ vrijedi,

logaritamski oblik		***eksponencijalni oblik***
$y = \log_a x$	$\Longleftrightarrow$	$x = a^y.$

Brojna svojstva logaritamske funkcije direktna su posljedica veza funkcije i njezinog inverza. Primjerice, ako je $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, onda je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \log_a x$ i vrijedi:

- $\big((f \circ f^{-1})(x) = x,\ x \in \mathbb{R}\big) \Leftrightarrow \big(f\big(f^{-1}(x)\big) = x\big) \Leftrightarrow \big(f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x\big)$
- $\big((f^{-1} \circ f)(x) = x,\ x \in (0, +\infty)\big) \Leftrightarrow \big(f^{-1}\big(f(x)\big) = x\big) \Leftrightarrow \big(f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x\big)$

Svojstva logaritamske funkcije Ako je $a > 0$ i $a \neq 1$, onda vrijedi:

1. $\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$
   $\log_a a^x = x, \qquad a^{\log_a x} = x,\ x > 0$
2. Ako su pritom $M, N > 0$, onda vrijedi:
   a) $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$
   b) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
   c) $\log_a M^p = p \cdot \log_a M$
   d) $\log_{a^p} M = \dfrac{1}{p} \log_a M$
   e) $\big(\log_a M = \log_a N\big) \Longleftrightarrow \big(M = N\big)$

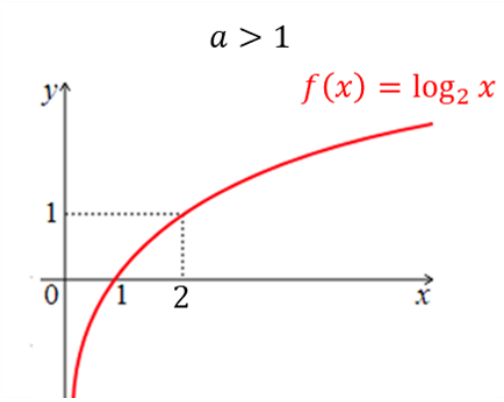
3. Promjena baze logaritamske funkcije

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ b > 0, b \neq 1 \text{ specijalno } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}.$$

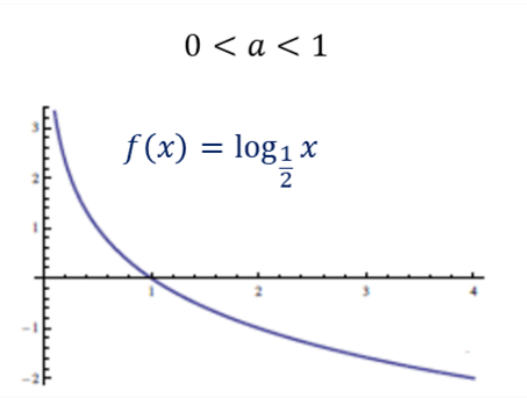
Graf logaritamske funkcije

Ovisno o vrijednosti baze logaritma razlikujemo dva slučaja:

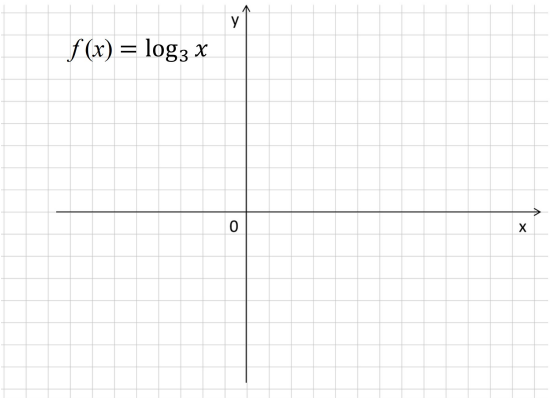
$I.$ $a > 1$

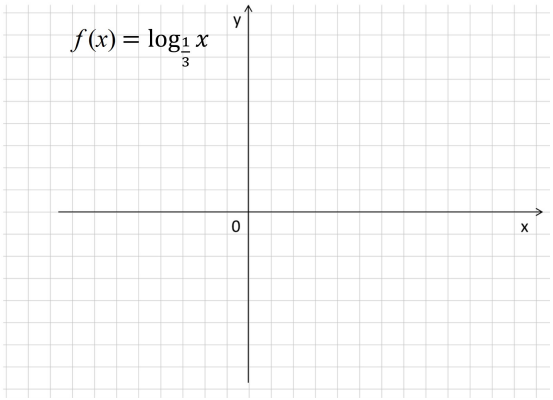


$II.$ $0 < a < 1$

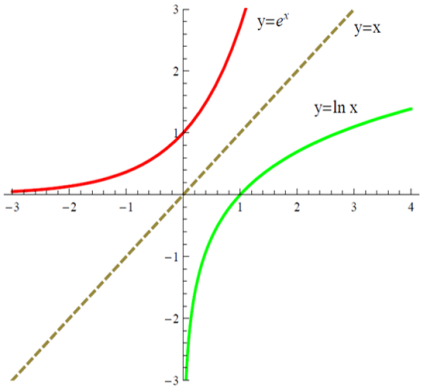


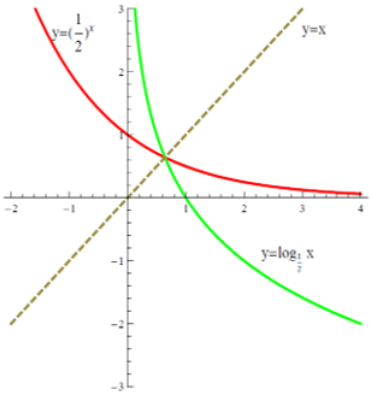
Primjer. Nacrtajte garafove sljedećih funkcija:





Grafovi funkcija a^x i $\log_a x$ simetrični su obzirom na pravac $y = x$.





Osnovna svojstva grafa logaritamske funkcije

1. Funkcija $y = \log_a x$ raste za $a > 1$ i pada za $0 < a < 1$.
2. Graf funkcije $y = \log_a x$ siječe os x u točki $(1, 0)$.
3. Funkcija $f(x) = \log_a x$ je bijekcija.
4. *Svojstvo injektivnosti logaritamske funkcije*.
   Funkcija $y = \log_a x$ je injektivna, tj. iz $\left(\log_a x_1 = \log_a x_2\right) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$.
5. Dakle, za $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ i $a \neq 1$, vrijedi

$$\mathcal{D}(f) = (0, +\infty), \quad Im(f) = \mathbb{R}.$$

Dekadski i prirodni logaritam

- Ako je baza logaritma $a = e$ uvodimo oznaku $\ln x = \log_e x$. Ovu funkciju nazivamo *prirodni logaritam*.
- Ako je baza logaritma $a = 10$ skraćeno zapisujemo $\log x = \log_{10} x$. Ovu funkciju nazivamo *dekadski logaritam*.

8.4 Zadatci

1. Izračunajte:

   (a) $100^{\log 7}$

   (b) $(\sqrt{10})^{3-2\log 2}$.

2. Izračunajte:

   (a) $\log_3 \frac{1}{9}$

   (b) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{4}$.

3. Izračunajte $\frac{2\log 2 + \log 7}{1 + \log 2.8}$.

4. Izračunajte $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8$.

Logaritamske jednadžbe Riješite sljedeće jednadžbe:

5. (a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

(b) $\log_5 x = \log_5 20 - \dfrac{1}{2}\log_5 16$

(c) $\log_3 \Big(\log_2(3x^2 - x) \Big) = 0$

(d) $4^{\log_2(x+2)} = 4x + 5.$

9 Trigonometrijske funkcije

Mjera kuta

Mjeru kuta izražavamo u stupnjevima ili radijanima. Svakom kutu α pridružujemo *glavnu mjeru kuta* α' iz skupa $0 \leq \alpha' < 360^\circ$ tako da vrijedi

$$\alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Radijanska mjera[1] kuta određuje se kao omjer duljine luka l prema polumjeru luka r.

$$1\,rad = \frac{1}{360^\circ} \cdot 2\pi, \qquad \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha\,rad}{\pi}.$$

- Pretvorba kuta α iz stupnjeva u radijane:

$$\alpha\,rad = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$

- Pretvorba kuta α iz radijana u stupnjeve:

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\,rad}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Primjer.

1. Kutove dane u stupnjevima zapišite u radijanima:

   i) $150^\circ =$ _____ $\quad -45^\circ =$ _____

   ii) $270^\circ =$ _____ $\quad -300^\circ =$ _____

2. Kutove dane u radijanima zapišite u stupnjevima:

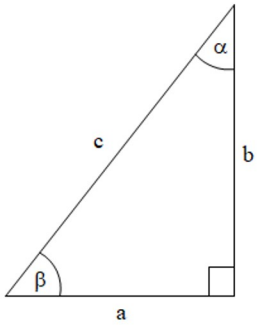
   i) $\frac{\pi}{3} =$ _____ $\quad -\frac{3\pi}{4} =$ _____

   ii) $\frac{\pi}{2} =$ _____ $\quad \frac{5\pi}{3} =$ _____

[1] Radijanska mjera je brojčana vrijednost, neovisna o jediničnoj mjeri.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta

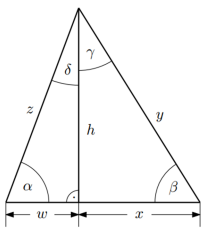
Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definiramo kao omjer stranica pravokutnog trokuta.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}$$

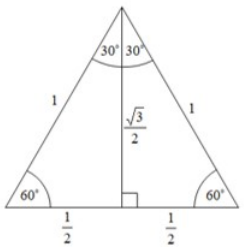
Primjer. U praznine unesite odgovarajuće duljine stranica.



$$\sin\alpha = \frac{\square}{\square} \quad \sin\beta = \frac{\square}{\square} \quad \sin\gamma = \frac{\square}{\square} \quad \sin\delta = \frac{\square}{\square}$$

$$\cos\alpha = \frac{\square}{\square} \quad \cos\beta = \frac{\square}{\square} \quad \cos\gamma = \frac{\square}{\square} \quad \cos\delta = \frac{\square}{\square}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\square}{\square} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\square}{\square} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\square}{\square} \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\square}{\square}$$



$$\sin 60^\circ = \qquad \cos 60^\circ = \qquad \operatorname{tg} 60^\circ =$$

$$\sin 30^\circ = \qquad \cos 30^\circ = \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ =$$

Tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

Osnovne trigonometrijske formule

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

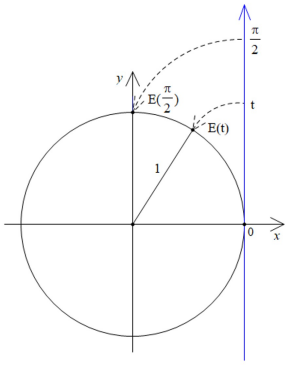
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

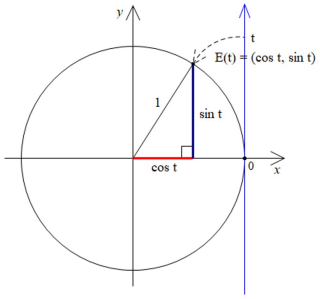
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

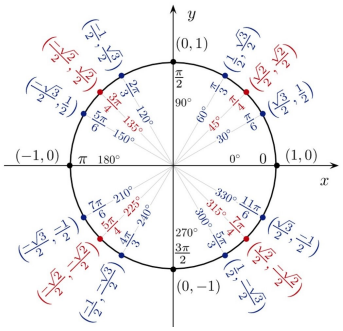
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

9.1 Trigonometrijska kružnica

Preslikavanje koje realne brojeve $t \in \mathbb{R}$, pridružuje točkama jedinične kružnice $E(t) \in \mathbb{R}^2$ nazivamo eksponencijalno preslikavanje $t \to E(t)$. **Brojevna kružnica** je jedinična kružnica čijim točkama eksponencijalnim preslikavanjem pridružujemo realne brojeve. Neka je t po volji realan broj, a $E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici. Tada je $E(t) = (\cos t, \sin t)$. Vrijednost funkcije **kosinus** jest apscisa, a vrijednost funkcije **sinus** jest ordinata točke $E(t)$.







Primjer.

1. Služeći se gornjom tablicom, zapiši koordinate točaka kojima odgovaraju dani kutovi na jediničnoj kružnici:

   i) $\frac{7\pi}{6}$ _____ $-\frac{\pi}{3}$ _____

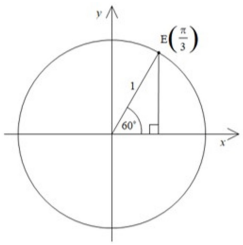
   ii) $420°$ _____ $-\frac{3\pi}{4}$ _____

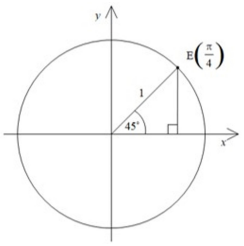
2. Služeći se gornjom slikom jedinične kružnice odredi kojim kutovima (i kojim kvadrantima) pripadaju točke dane sljedećim koordinatama:

   i) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ _____ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ _____

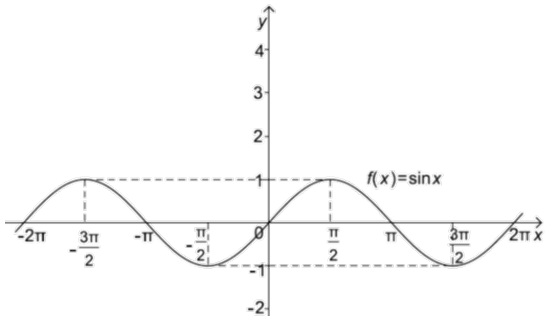
   ii) $(1, 0)$ _____ $(0, -1)$ _____

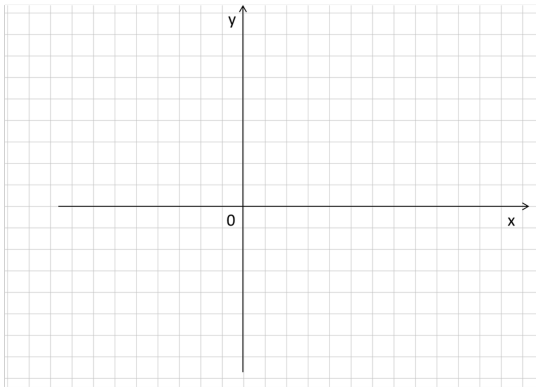
Primjer. Pomoću brojevne kružnice odredite $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ i $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$.





9.2 Sinus $\sin x$





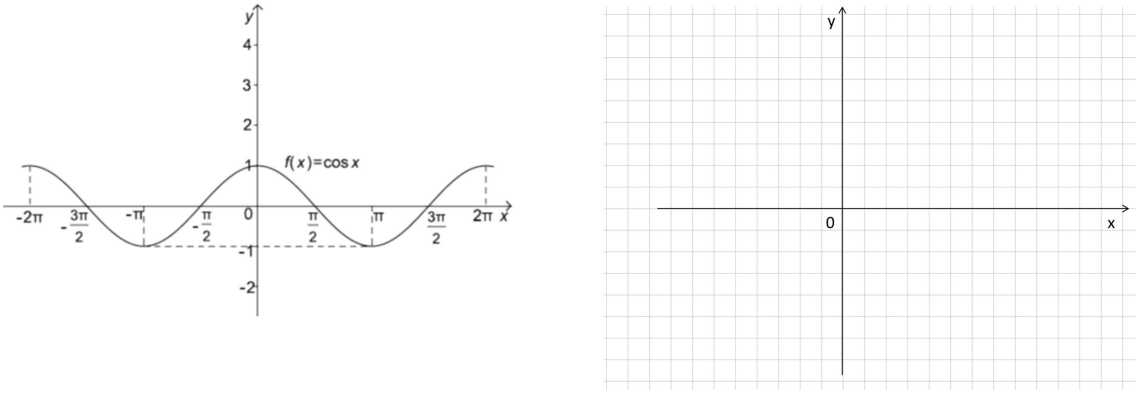
Slika 8: Funkcija $\sin x$

- Područje definicije funkcije sinus je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$.
- Skup vrijednosti funkcije sinus je interval $[-1, 1]$, $Im_{\sin} = [-1, 1]$.
- Funkcija sinus je neparna funkcija, tj. vrijedi $\sin(-x) = -\sin x$ za $x \in \mathbb{R}$.
- Funkcija sinus je periodična funkcija s temeljnim periodom 2π, tj.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Nultočke su: $N_{\sin} = \{k\pi | \, k \in \mathbb{Z}\}$.

9.3 Kosinus $\cos x$



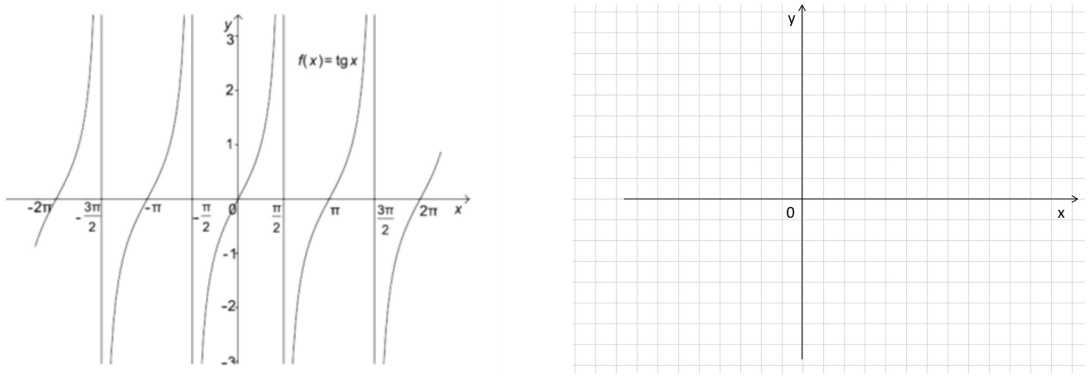
Slika 9: Funkcija $\cos x$

- Područje definicije funkcije kosinus je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$.
- Skup vrijednosti funkcije kosinus je interval $[-1, 1]$, $Im_{\cos} = [-1, 1]$.
- Funkcija kosinus je parna funkcija, tj. vrijedi $\cos(-x) = \cos x$ za $x \in \mathbb{R}$.
- Funkcija kosinus je periodična funkcija s temeljnim periodom 2π, tj.

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Nultočke su: $N_{\cos} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | \, k \in \mathbb{Z} \right\}$

9.4 Tangens $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



Slika 10: Funkcija $\operatorname{tg} x$

- Skup vrijednosti funkcije tangens je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,

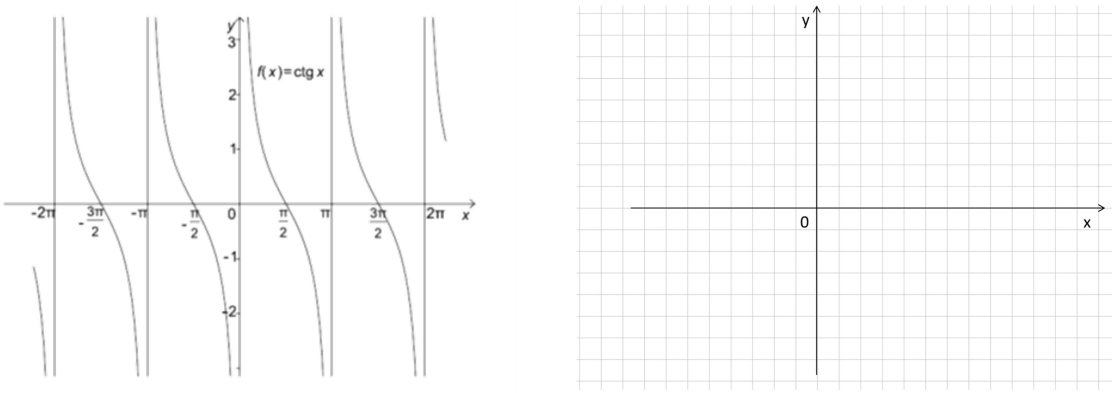
$$\mathcal{D}_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Skup vrijednosti funkcije tangens je skup realnih brojeva, $Im_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R}$
- Funkcija tangens je neparna funkcija, tj. vrijedi $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ za $x \in D_{\operatorname{tg}}$.
- Funkcija tangens je periodična funkcija s temeljnim periodom π, tj.

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \text{za} \quad x \in D_{\operatorname{tg}}.$$

- Nultočke su: $N_{\operatorname{tg}} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

9.5 Kotangens $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$



Slika 11: Funkcija $\operatorname{ctg} x$

- Skup vrijednosti funkcije kotangens je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}_{\operatorname{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Skup vrijednosti funkcije kotangens je skup realnih brojeva, $Im_{\operatorname{ctg}} = \mathbb{R}$.
- Funkcija kotangens je neparna funkcija, tj. vrijedi $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ za $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}$.
- Funkcija kotangens je periodična funkcija s temeljnim periodom π, tj.

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x, \quad \text{za} \quad x \in \mathcal{D}_{ctg}\,.$$

- Nultočke su: $N_{\operatorname{ctg}} = \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi | \, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

9.6 Zadatci

1. Odredite vrijednosti preostalih trigonometrijskih funkcija $(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)$:

   i) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos x < 0$

   ii) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x \in III.$ kvadrantu

   iii) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \qquad x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$

2. Riješite dane jednadžbe:

   (a) $\sin 3x = -1$

   (b) $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

(c) $\sin 2x \cdot \cos 3x = 0$

3. Riješite jednadžbe:

(a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

(b) $\cos 2x = \cos x$

(c) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

(d) $\operatorname{tg} 3x \cdot \cos 2x = 0$

4. Riješite u intervalu $[0, 2\pi\rangle$ sljedeće nejednadžbe:

   (a) $\sin x > \sin 2x$

   (b) $\cos 8x - \cos 4x \leq 0$

10 Transformacije nad grafovima funkcija

10.1 Horizontalna translacija

Neka je dana funkcija f i realni broj $c \in \mathbb{R}$. Ako za funkciju g vrijedi

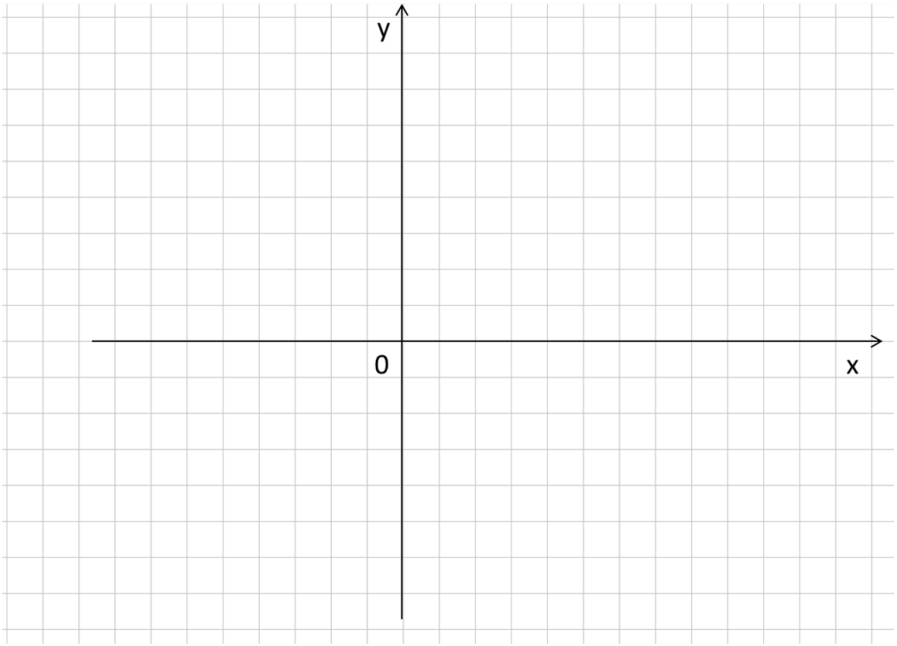
$$g(x) = f(x - c), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje horizontalnom translacijom grafa funkcije f u desno ako je $c > 0$, odnosno u lijevo ako je $c < 0$.

Primjeri

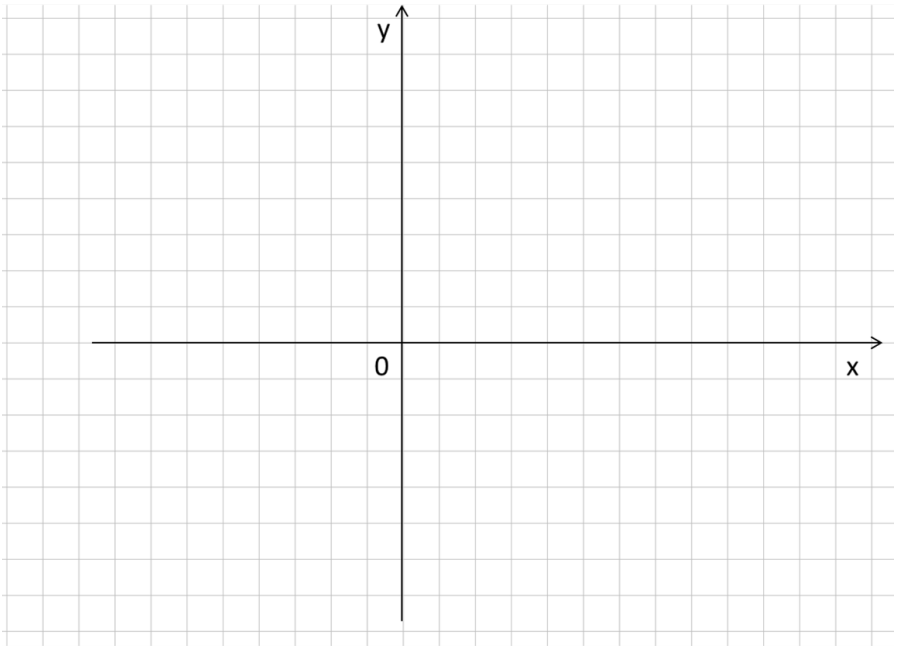
1. $f(x) = x^2, \qquad g(x) = (x-1)^2$

   Tada je $g(x) = f(x-1)$, odnosno $c = 1$, i riječ je o translaciji u desno za 1.



2. $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

   Tada je $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$, odnosno $c = -\frac{\pi}{2}$, i riječ je o translaciji u lijevo za $\frac{\pi}{2}$.



10.2 Vertikalna translacija

Neka je dana funkcija f i realni broj $k \in \mathbb{R}$. Ako za funkciju g vrijedi

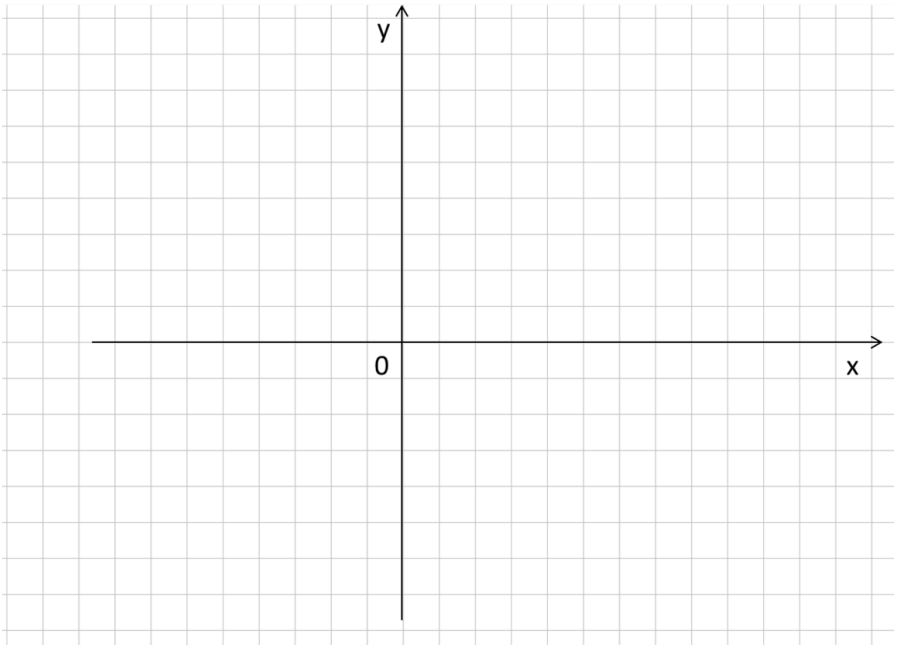
$$g(x) = f(x) + k, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje vertikalnom translacijom grafa funkcije f prema gore ako je $k > 0$, odnosno prema dolje ako je $k < 0$.

Primjeri

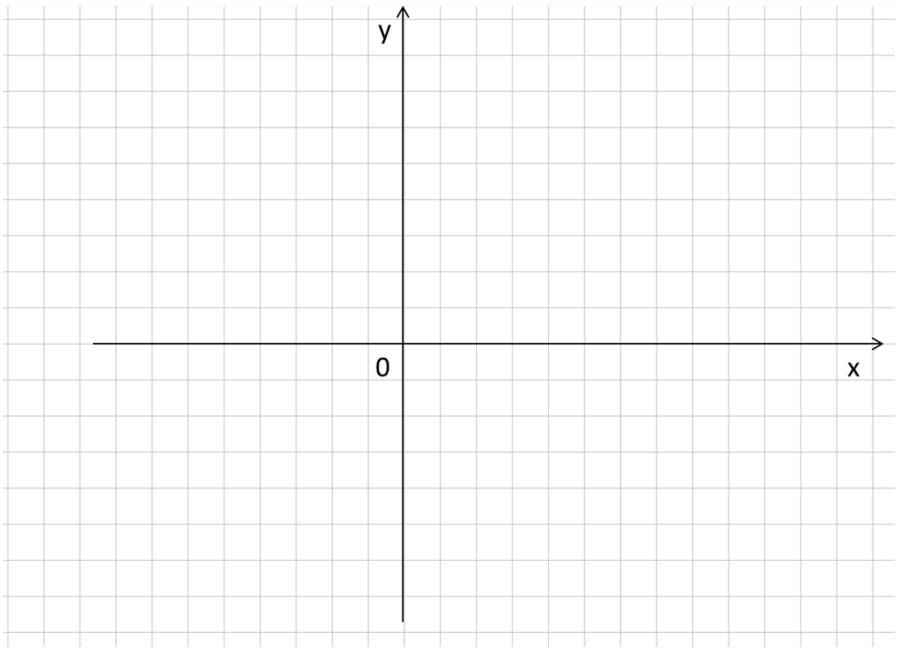
1. $f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^2 - 1$

   Tada je $g(x) = f(x) - 1$, odnosno $k = -1$, i riječ je o translaciji prema dolje za 1.



2. $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin x + 1$

   Tada je $g(x) = f(x) + 1$, odnosno $k = 1$, i riječ je o translaciji prema gore za 1.



10.3 Skaliranje u smjeru osi y

Neka je dana funkcija f i realni broj $A > 0$ te funkcija g za koju vrijedi

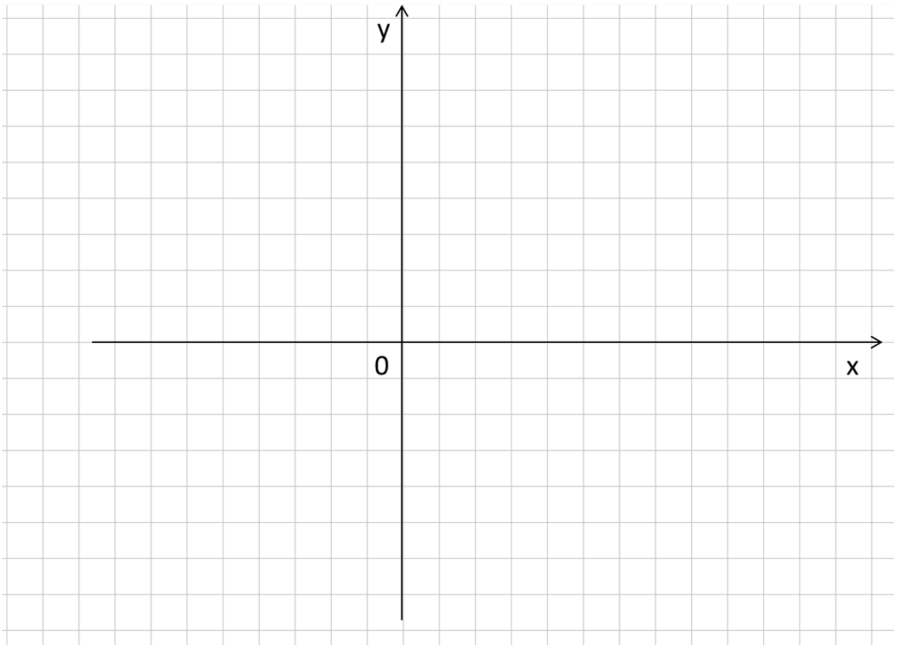
$$g(x) = A \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Amplituda grafa funkcije g se u odnosu na amplitudu grafa funkcije f povećala za faktor A ako je $A > 1$, odnosno smanjila za faktor A ako je $0 < A < 1$.

Primjeri

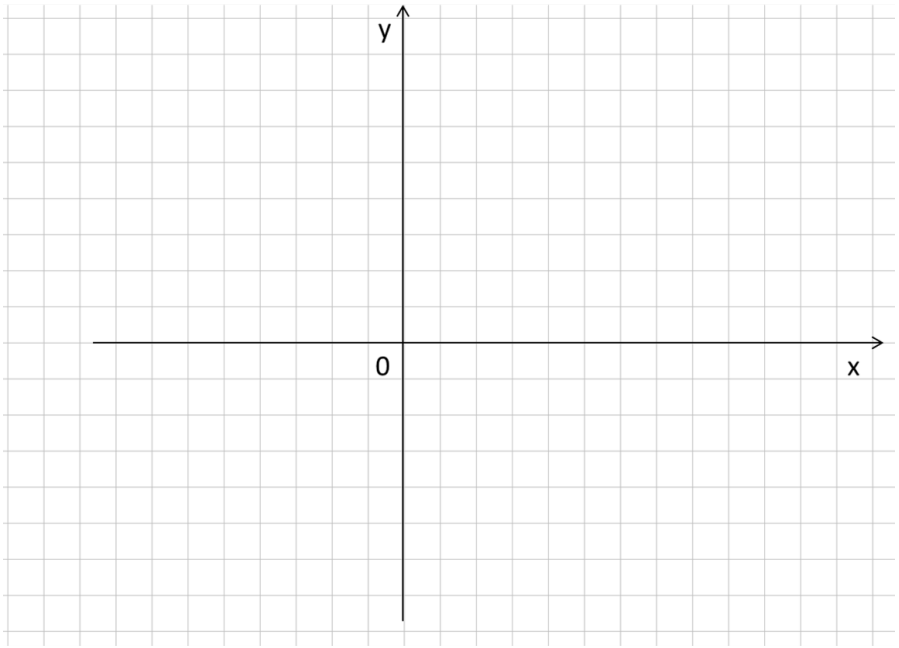
1. $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = 2 \sin x$

   Tada je $g(x) = 2f(x)$, odnosno $A = 2$. Amplituda grafa funkcije g se povećala za faktor 2.



2. $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{1}{3}\sin x$

   Tada je $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, odnosno $A = \frac{1}{3}$. Amplituda grafa funkcije g se smanjila za faktor $\frac{1}{3}$.



10.4 Skaliranje u smjeru osi x

Neka je dana funkcija f i realni broj $\lambda > 0$ i funkcija g za koju vrijedi

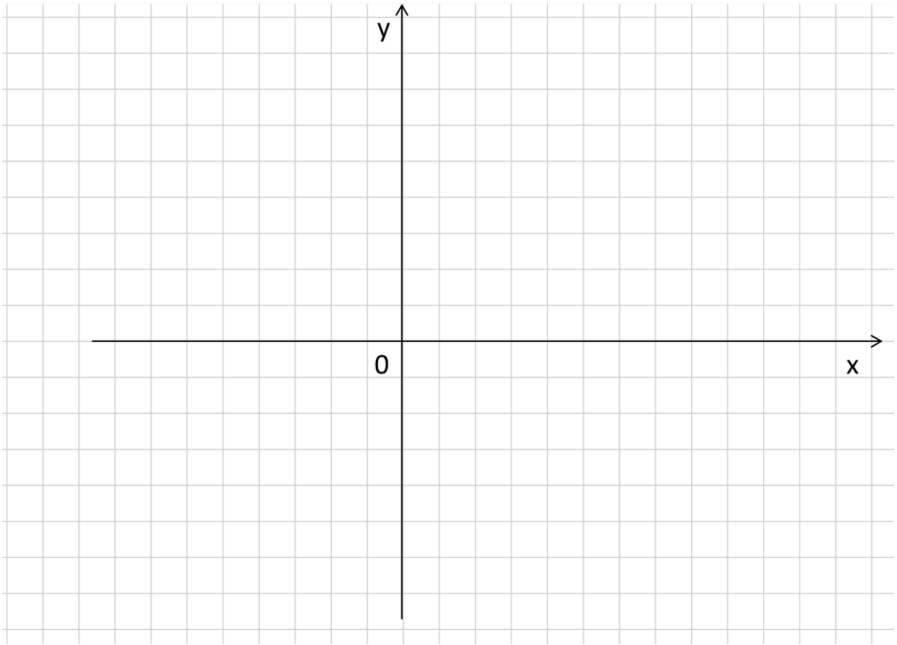
$$g(x) = f(\lambda \cdot x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Graf funkcije g nastaje stezanjem (kontrakcijom) grafa funkcije f za faktor λ ako je $\lambda > 1$, odnosno rastezanjem (dilatacijom) grafa funkcije f za faktor λ ako je $0 < \lambda < 1$.

Primjeri

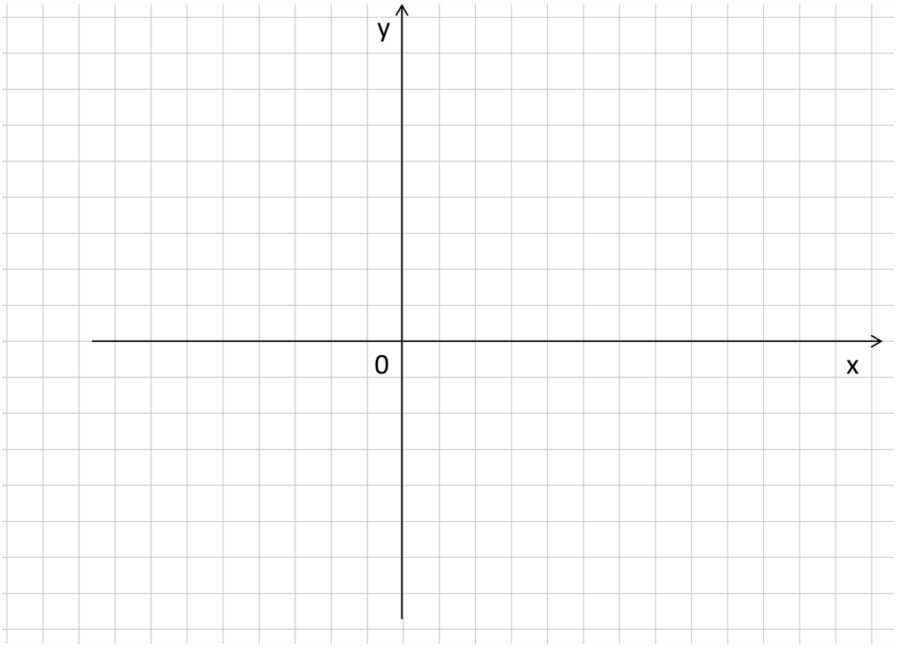
1. $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin 2x$

   Tada je $g(x) = f(2x)$, odnosno $\lambda = 2$ i dolazi do stezanja grafa funkcije g.



2. $f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

   Tada je $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, odnosno $\lambda = \frac{1}{3}$ i dolazi do rastezanja grafa funkcije g.



10.5 Zrcaljenje obzirom na os x

Ako za funkcije f i g vrijedi

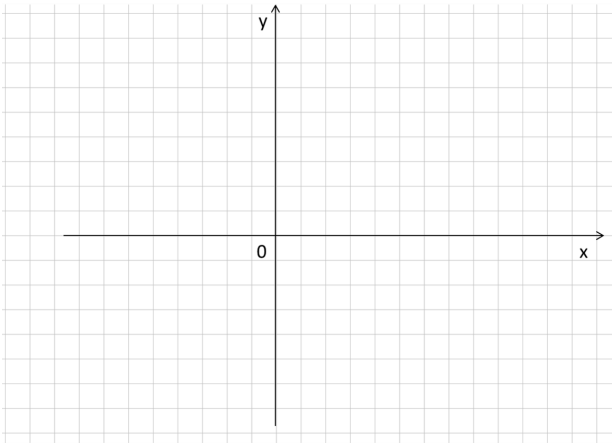
$$g(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na os x.

Primjeri

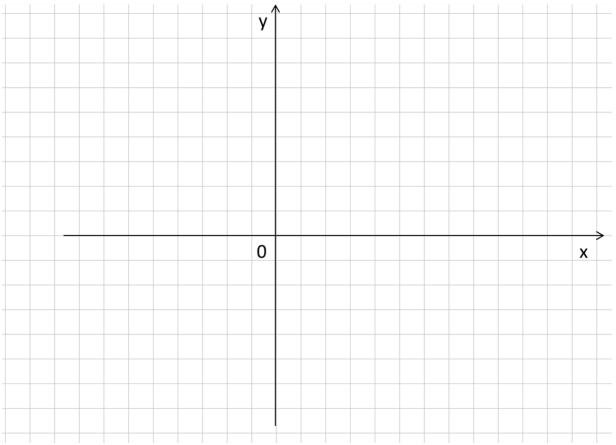
1. $f(x) = x^2, \qquad g(x) = -x^2$

   Tada je $g(x) = -f(x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimentrični obzriom na os x.



2. $f(x) = \ln x, \qquad g(x) = -\ln x$

   Tada je $g(x) = -f(x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimentrični obzriom na os x.



10.6 Zrcaljenje obzirom na os y

Ako za funkcije f i g vrijedi

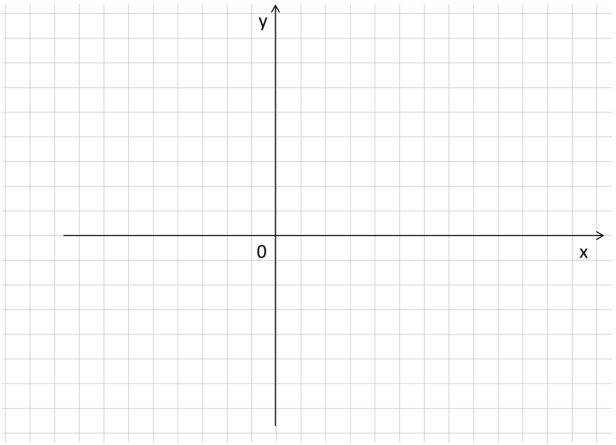
$$g(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na os y.

Primjeri

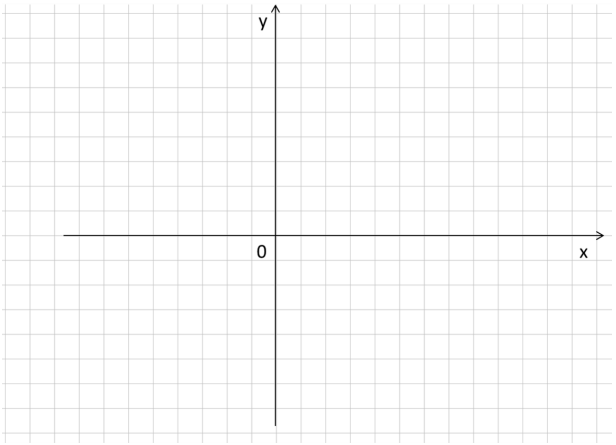
1. $f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = -2x + 1$

   Tada je $g(x) = f(-x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimentrični obzriom na os y.



2. $f(x) = e^x, \qquad g(x) = e^{-x}$

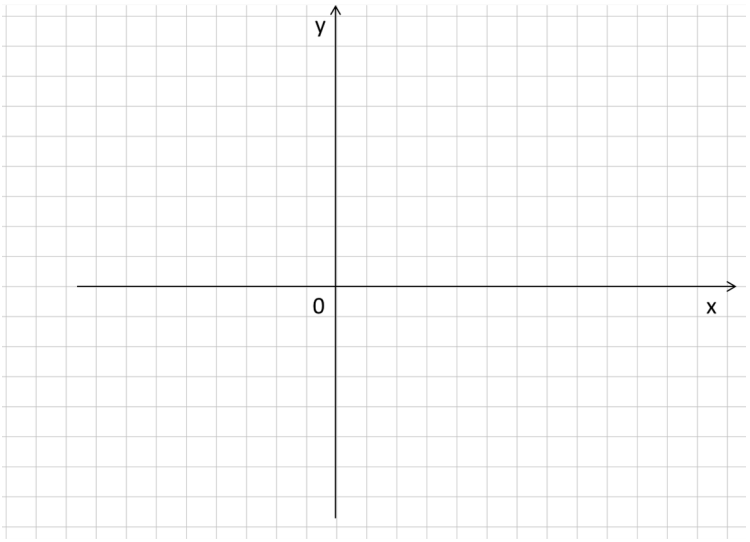
   Tada je $g(x) = f(-x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimentrični obzriom na os y.



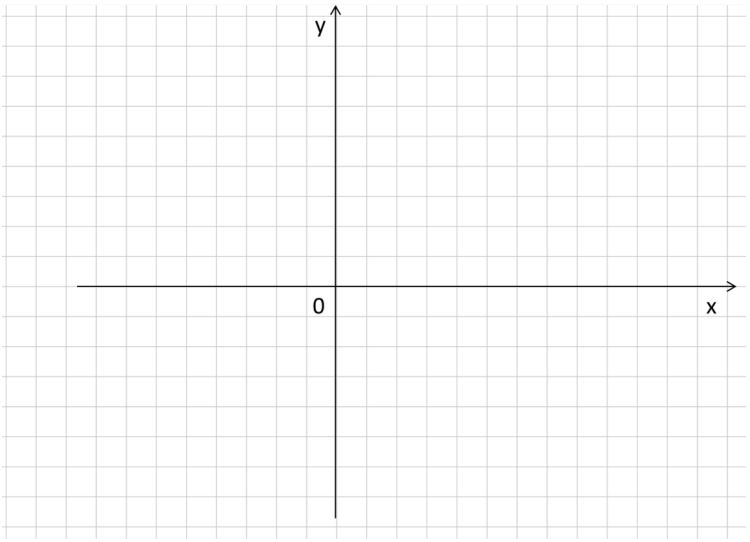
10.7 Zadatci

Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

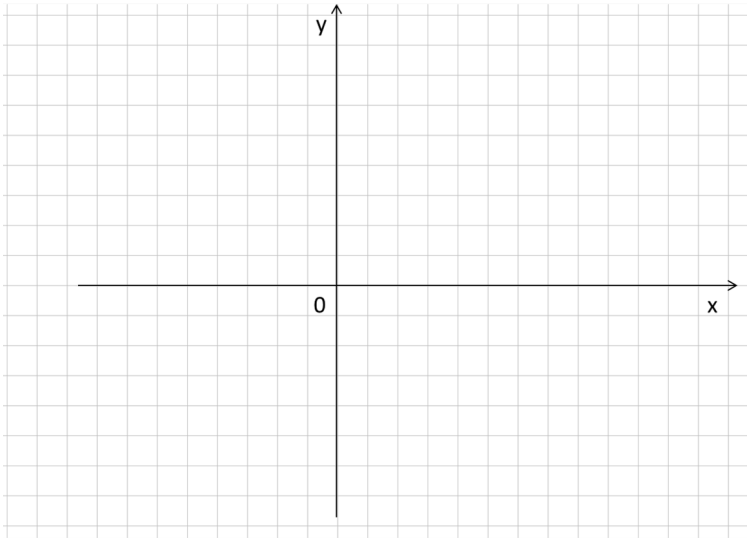
1. $f(x) = (x+2)^2 + 1$



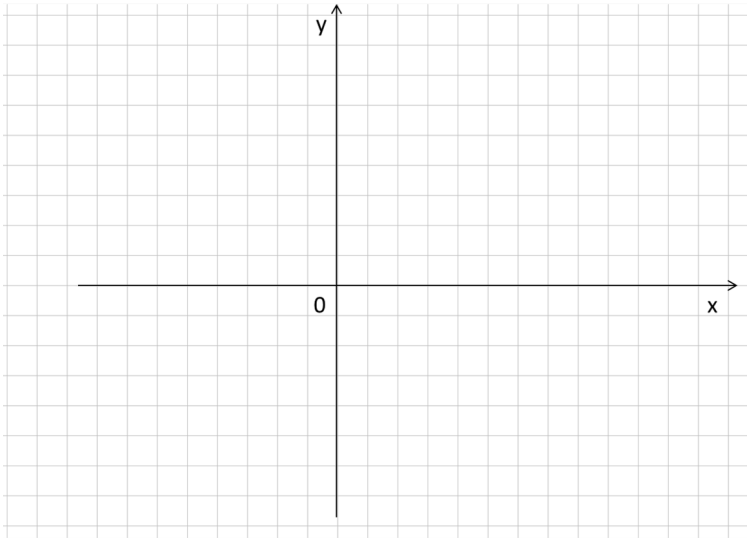
2. $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$



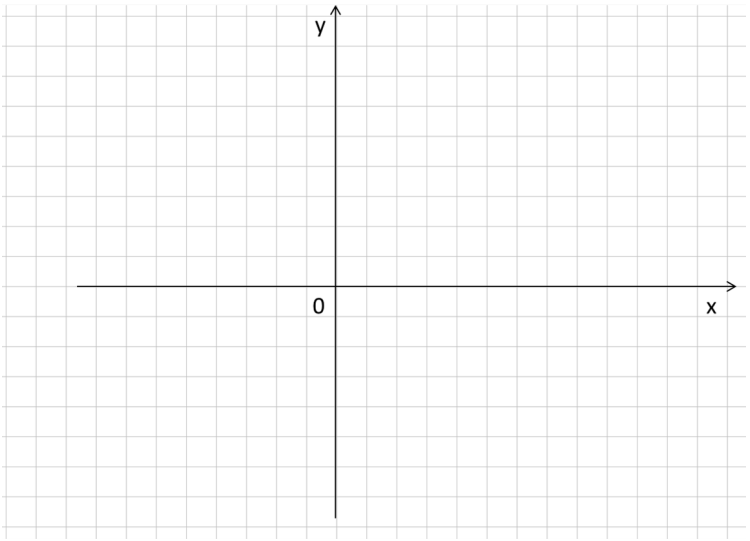
3. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 1$



4. $f(x) = -e^{-x}$



5. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$



11 Apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutna vrijednost realnog broja x, u oznaci $|x|$, je broj

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Svojstva

- $|-x| = |x|$
- $x \leq |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \leq |x| + |y|$
- $\Big(|x| \leq a\Big) \Longleftrightarrow \Big(-a \leq x \leq a\Big)$
- $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$

11.1 Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

11.2 Zadatci

1. Riješite jednadžbu: $|2x - 4| = 3x - 1$.

2. Riješite jednadžbu: $|2x - 3| - |x + 1| = 5x - 10$.

3. Riješite nejednadžbu: $x + |x| \leq 1$.

4. Riješite nejednadžbu: $|4 - 2x| + 6x > 0$.

5. Riješite nejednadžbu: $|2x - 3| - |3x + 7| > 0$.

6. Riješite nejednadžbu: $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq 2$.

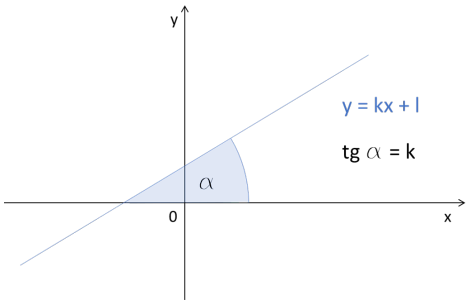
12 Pravac

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca
$y = kx + l$
k - koeficijent smjera
l- odsječaka na osi y

Implicitni oblik jednadžbe pravca
$Ax + By + c = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0$

Segmentni oblik jednadžbe pravca
$\frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1$

m - odsječak na osi x
n- odsječaka na osi y



Uvjet paralelnosti dvaju pravaca

$p_1 \ldots y = k_1 x + l_1$
$p_1 \ldots y = k_2 x + l_2$ $\qquad p_1 || p_2 \iff k_1 = k_2$

$p_1 \ldots A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
$p_1 \ldots A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ $\qquad p_1 || p_2 \iff A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$

Uvjet okomitosti dvaju pravaca

$p_1 \ldots y = k_1 x + l_1$
$p_1 \ldots y = k_2 x + l_2$ $\qquad p_1 \perp p_2 \iff k_1 \cdot k_2 = -1$

$p_1 \ldots A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
$p_1 \ldots A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ $\qquad p_1 \perp p_2 \iff A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

Jednadžbe pravca koji ima koeficijenta smjera k i sadrži točku $T(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Jednadžbe pravca koji sadrži dvije točke $T_1(x_1, y_1)$ **i** $T_2(x_2, y_2)$ glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Udaljenost d **točke** $T(x_0, y_0)$ **od pravca** $Ax + By + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

12.1 Zadatci

1. Nađite segmentni oblik jednadžbe pravca $2x - 7y - 14 = 0$.

2. Nađite jednadžbu pravca koji je paralelan s pravcem $3x - 4y + 15 = 0$ i koji sadrži točku $T(2, 5)$.

3. Zadana je familija pravaca $\lambda \cdot x - 3(1-\lambda)y + 5\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Nađite onaj pravac te familiije koji je okomit na pravac $2x - 3y + 11 = 0$.

4. Nađite jednadžbu pravca kojemu je odsječak na osi y jednak -3 i koji prolazi točkom $A(2, 5)$.

5. Nađite sjecište S pravaca p, q ako je dano

$$p \ldots \qquad x + y - 1 = 0$$

$$q \ldots \qquad 2x + 3y + 4 = 0.$$

6. Nađite jednadžbu pravca koji je okomit na pravac $y = 2x - 3$, a parabolu $y = x^2$ siječe u točki s apscisom $x = 2$.