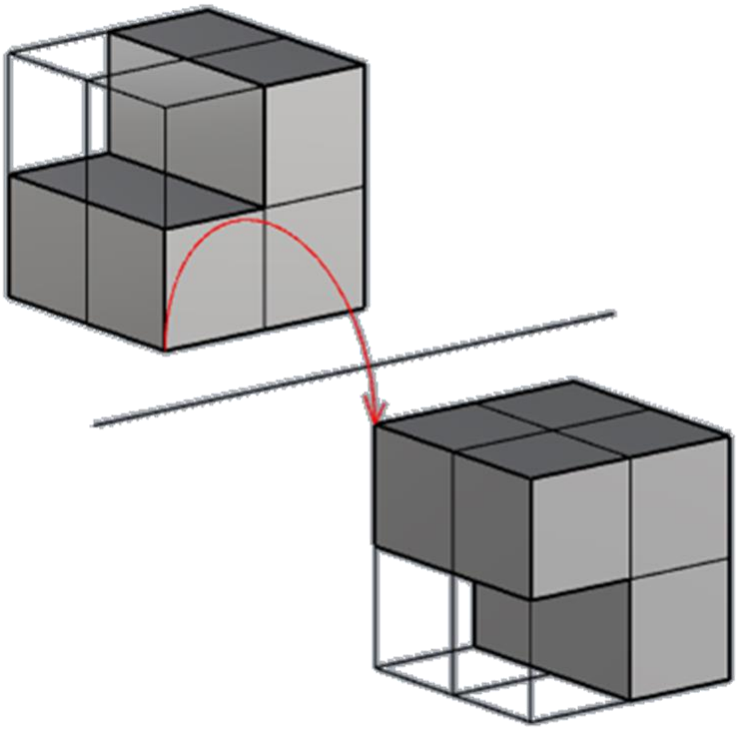


GEOMETRIJA

Mostni kolegij: Matematika

SADRŽAJ

Geometrija ravnine – planimetrija.

Geometrija prostora – stereometrija.

Rudarsko - geološko - naftni fakultet
Sveučilište u Zagrebu

GEOMETRIJA RAVNINE (PLANIMETRIJA) 2

Osnove ravninske geometrije 2
Točke i pravci. Međusobni odnosi 2
Kut. Odnosi među kutovima. 4
Konstrukcije nekih kutova. 5
Okomitost. 5
Mnogokuti (poligoni ili višekuti) 6

Ravninski Kartezijev koordinatni sustav 10

Transformacije ravnine 11
Izometrije. Kongruentna preslikavanja 11
Konformne transformacije 12
Kružnica 14

GEOMETRIJA PROSTORA (STEREOMETRIJA) 17

Osnove prostorne geometrije. 17
Točke, pravci, ravnine. Međusobni odnosi. Paralelnost i okomitost. 17
Udaljenosti i kutovi prostornih elemenata. 18
Kut pravca i ravnine. Kut dviju ravnina. 19

Geometrijska tijela 21
Poliedri (uglata tijela) 21
Prizme 22
Piramide 23
Pravilni poliedri (Platonova tijela) 23
Obla tijela 25
Valjci 25
Stošci 25
Sfere 26

Pravokutna ili ortogonalna projekcija 27

Prostorni Kartezijev koordinatni sustav 31

Transformacije prostora 33

RJEŠENJA 36

TABLICA 1 KRATAK PREGLED GEOMETRIJSKIH OZNAKA I RELACIJA

oznaka	**objekt**
T, P, Q,...	točka
p, q, m...	Pravac
$\overline{\mathbf{PQ}}$	dužina određena točkama **P**, **Q**
$\mathbf{p} = \mathbf{MN}$	pravac *p* određen točkama **M**, **N**
$\mathbf{T} = \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$	točka **T** određena kao sjecište pravaca ***p, q***
||	relacija paralelnosti
$\perp$	relacija okomitosti
$\mathbf{d}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \lvert\mathbf{PQ}\rvert$	udaljenost točaka **P, Q**
k(S, r)	kružnica sa središtem u točki S polumjera r

oznaka	značenje	**Primjer**
$\in, \notin$ $\subset, \not\subset$	relacija pripadanja	$T \in p$ Točka T leži na pravcu *p*. $T \notin p$ Točka T ne leži na pravcu *p*. $p \subset \alpha$ Pravac p leži u ravnini α. $t \not\subset \beta$ Pravac t ne leži u ravnini β.
$\Rightarrow$	slijedi	$T \in p$ i $p \subset \alpha \Rightarrow T \in \alpha$ Čitaj: Ako točka T leži na pravcu p i pravac p leži u ravnini α, onda i točka T leži u ravnini α.
$\Leftrightarrow$	ekvivalentno	$a \perp b \Leftrightarrow \angle(a,b) = 90°$ Pravci a, b su okomiti onda i samo onda ako je kut između njih 90°.

GEOMETRIJA RAVNINE (PLANIMETRIJA)

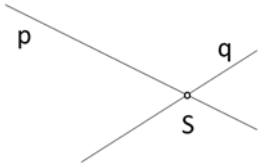
OSNOVE RAVNINSKE GEOMETRIJE

TOČKE I PRAVCI. MEĐUSOBNI ODNOSI

Osnovni elementi pomoću kojih izgrađujemo ravninsku geometriju su **točke** i **pravci**. Opisat ćemo ukratko položajne odnose između njih te se prisjetiti nekih osnovnih pojmova iz **planimetrije** (područje geometrije koje se bavi proučavanjem geometrijskih figura u ravnini i njihovih odnosa).

- ***Spojnica dviju točaka***. Neka su dane dvije točke P i Q. Tada postoji točno jedan pravac *s* koji sadrži točke P i Q. Zovemo ga spojnicom točaka P i Q i pišemo $s = PQ$.

- **Dva pravca *p*** i ***q*** u ravnini mogu se sjeći ili biti paralelni (oznaka $p \parallel q$). Ako je S sjecište dvaju ukriženih pravaca *p*, *q,* koristimo oznaku $S = p \cap q$.



SLIKA 1 UKRIŽENI PRAVCI



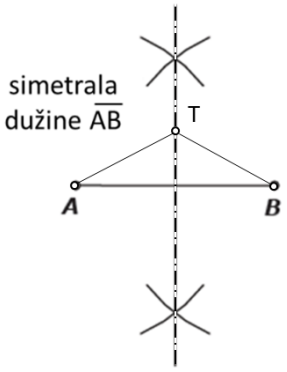
SLIKA 2 PARALELNI PRAVCI

Ako točka T leži na pravcu p koristimo oznaku $T \in p$.

- Za tri ili više točaka koje leže na istom pravcu kažemo da su ***kolinearne točke.*** Za tri ili više pravaca koji prolaze istom točkom kažemo da su ***kopunktalni (konkurentni) pravci***.

- Dvije točke A, B određuju dužinu (oznaka $\overline{AB}$). Duljinu dužine $\overline{AB}$ označavamo $d(A, B) = |AB|$.

- Sve točke ravnine jednako udaljene od krajnjih točaka dužine $\overline{AB}$ leže na jednom pravcu koji nazivamo **simetrale dužine**. Simetrala dužine prolazi polovištem dužine i okomita je na nju.



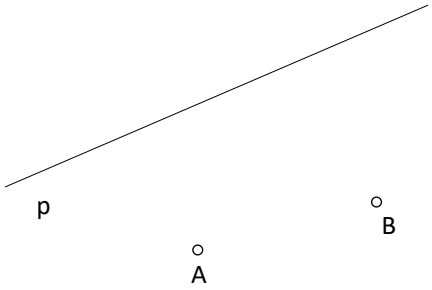
SLIKA 3 SIMETRALA DUŽINE

Zadatak 1.
Zadana je dužina AB. Odredi simetralu dane dužine.

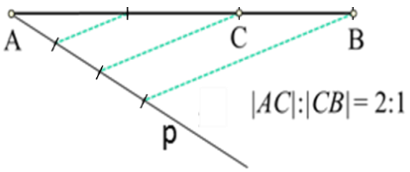


Zadatak 2.
Na danom pravcu p odredi točku T koja je jednako udaljena od točaka A, B.

Koraci:

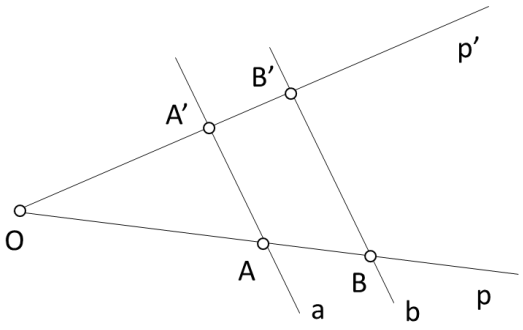


Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u **omjeru *m : n*** ako vrijedi $|AC|:|CB| = m:n$. Na slici desno prikazana je konstrukcija točke C koja dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru 2 : 1 korištenjem pomoćnog polupravca *p,* odnosno korištenjem Talesovog poučka:



SLIKA 4 OMJER TOČAKA A, B, C

Talesov poučak o proporcionalnim dužinama



Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle(p, p')$ *odsijecaju proporcionalne dužine:*

$$|OA|:|OB| = |OA'|:|OB'|$$

$$|OA|:|OB| = |AA'|:|BB'|.$$

Osim toga vrijedi i $|OA|:|OA'| = |AB|:|A'B'|$.

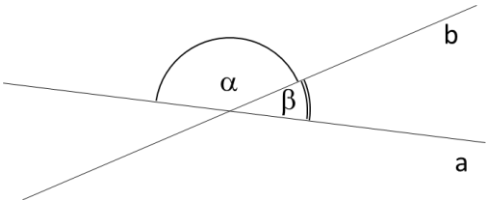
Zadatak 3. Danu dužinu $\overline{\mathrm{MN}}$ podijeli u omjeru 2 : 3.



Koraci:

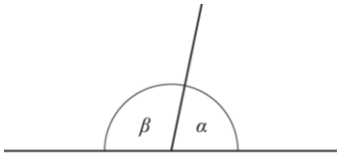
KUT. ODNOSI MEĐU KUTOVIMA.

- Dva polupravca sa zajedničkom početnom točkom određuju **kut**. Pritom je svakom kutu pridružena „mjera kuta“.
- Mjeru kuta između dva pravca *p* i *q* označavat ćemo $\angle(\mathrm{p},\mathrm{q})$. To je manji od dva kuta što ga zatvaraju pripadni polupravci.

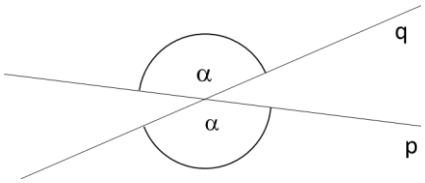


Ovisno o položaju krakova kuta govorimo o:

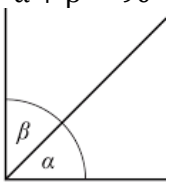
sukuti ili susjedni kutovi
$\alpha + \beta = 180°$



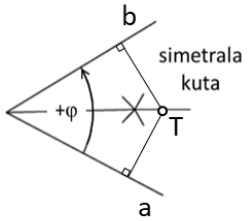
vršni kutovi



komplementarni kutovi
$\alpha + \beta = 90°$



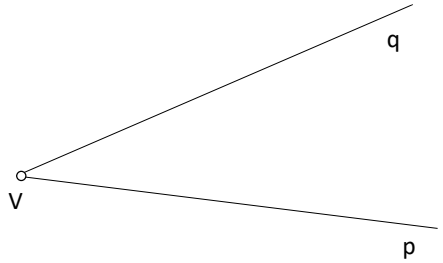
- Sve točke ravnine jednako udaljene od krakova danog kuta leže na jednoj zraci koju nazivamo **simetralom kuta**. Konstrukciju provodimo koristeći činjenicu da simetrale kuta dani kut dijeli na dva jednaka kuta i prolazi njegovim vrhom.



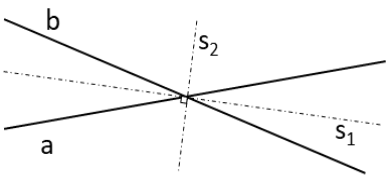
SLIKA 5 SIMETRALA KUTA $d(T,a) = d(T,b)$

Zadatak 4.

Za dani kut određen polupravcima p, q konstruiraj njegovu simetralu.



- Za dva pravca a, b simetrale s_1, s_2 koje oni određuju su međusobno okomite.



SLIKA 6 SIMETRALE KUTOVA DVAJU PRAVACA

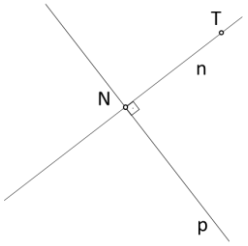
KONSTRUKCIJE NEKIH KUTOVA.

Primjer. Koristeći samo ravnalo i šestar izvedi sljedeće konstukcije kuta α.

$\alpha = 60°$	$\alpha = 120°$	$\alpha = 30°$
$\alpha = 90°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 22.5°$

OKOMITOST.

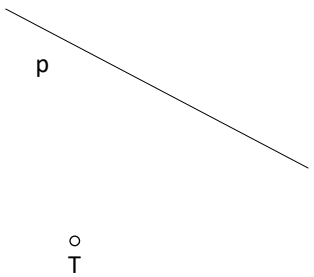
Za dva međusobno **okomita** pravca pišemo $p \perp q$. Mjera njihova kuta je tada 90° (mjereno u stupnjevima) ili $\pi/2$ mjereno u radijanima: $\angle(\mathrm{p},\mathrm{q}) = 90°$, odnosno $\angle(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \pi/2$. Umjesto pojma „biti okomit" koristi se također pojam poput „**biti ortogonalan**".



SLIKA 7 OKOMITI PRAVCI

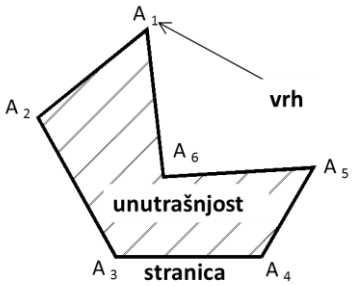
- Neka su dani pravac *p* i točka T. Postoji točno jedan pravac *n* okomit na pravac *p* koji prolazi kroz T. Ovaj pravac *n* nazivamo **okomicom** ili **normalom** pravca *p* u točki T. Sjecište N normale *n* i danog pravca *p* nazivamo **nožištem** normale *n* i pravca *p*.
- Udaljenost točke od pravca je najkraća udaljenost dane točke od pravca. To je udaljenost točke T od nožišta N.

Zadatak 5. Neka je dan pravac p i točka T. Odredi udaljenost točke T od pravca p.



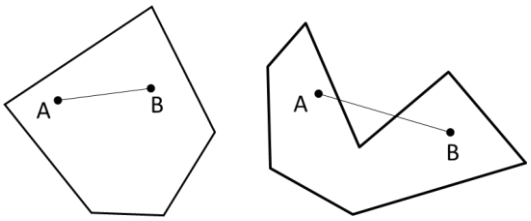
MNOGOKUTI (POLIGONI ILI VIŠEKUTI)

Najjednostavnije geometrijske figure su trokuti i četverokuti. Oni pripadaju većoj klasi figura koje nazivamo **mnogokutima**: Pod (ravninskim[1]) mnogokutom podrazumijevamo zatvorenu (ravninsku) izlomljenu liniju tj. niz od *n* dužina. Linija je zatvorena ako joj se početak i kraj podudaraju.



SLIKA 8 MNOGOKUT

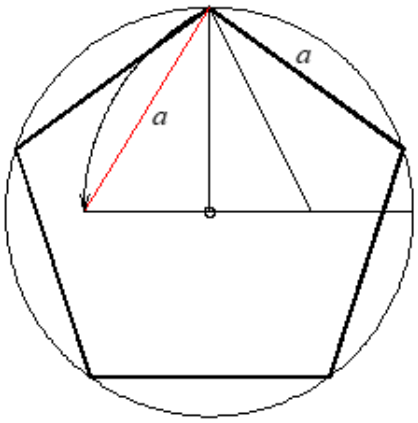
Dužine nazivamo **stranicama**, a njihove krajnje točke **vrhovima** mnogokuta. Uobičajeno je (iako nije obavezno) pri označavanju vrhova mnogokuta koristiti pozitivan smjer rotacije (slika lijevo). Mnogokut koji ima *n* stranica, dakle i *n* vrhova, nazivamo **n-terokutom**.



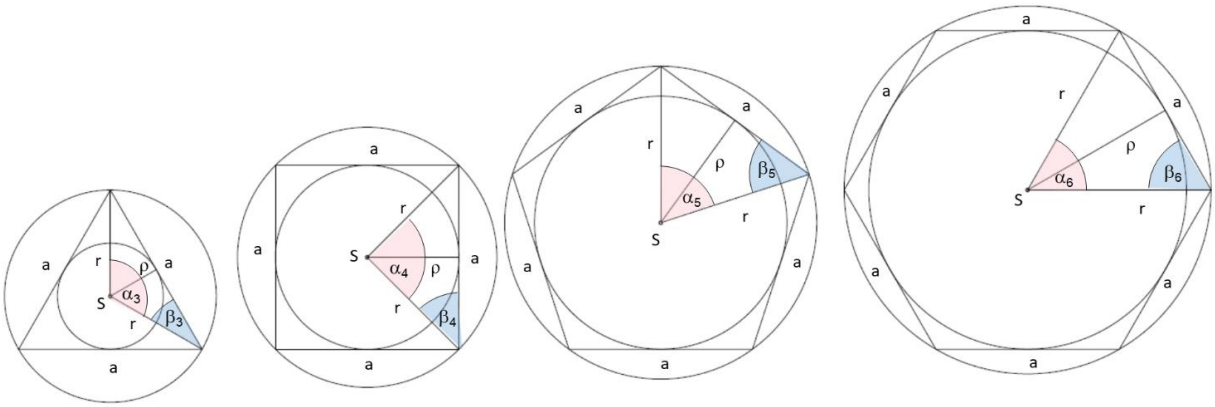
SLIKA 9 KONVEKSNI (LIJEVO) I KONKAVNI (DESNO) MNOGOKUT

Općenito razlikujemo konveksne mnogokute, i one koji to nisu. Mnogokut je **konveksan** ako spojnica bilo koje dvije njegove točke iz unutrašnjosti leži u potpunosti u unutrašnjosti mnogokuta.

Mnogokut čije sve stranice imaju jednaku duljinu i svi unutarnji kutovi jednaku veličinu zove se **pravilni mnogokut.** Pravilni mnogokut koji ima *n* vrhova nazivamo **pravilnim *n*-terokutom**. Pravilni trokut **nazivamo jednakostraničnim trokutom**, a pravilni četverokut **kvadratom**.



SLIKA 10 KONSTRUKCIJA PRAVILNOG PETEROKUTA



SLIKA 11 PRAVILNIH MNOGOKUTI ZA $n = 3, 4, 5, 6$

[1] Postoje i prostorni mnogokuti čiji svi vrhovi ne leže u jednoj ravnini.

Znamo da svakom trokutu možemo opisati jednu kružnicu i upisati jednu kružnicu. To ne vrijedi općenito za svaki mnogokut, ali vrijedi sljedeće:

- Svakom pravilnom mnogokutu možemo opisati jednu kružnicu i upisati jednu kružnicu. Središta ovih dviju kružnica se podudaraju i ovo središte nazivamo **središtem pravilnog mnogokuta**. Dirališta upisane kružnice pravilnog mnogokuta leže na polovištima stranica mnogokuta.
- Spojnica središta pravilnog mnogokuta s dva susjedna vrha određuju jednakokračni trokut čiji su krakovi polumjer opisane kružnice, a osnovica stranica tog mnogokuta. Taj trokut zovemo **karakteristični trokut** pravilnog mnogokuta (slika 11).
- Za središnji kut α_n pravilnog n-terokuta i kut β_n uz osnovicu karakterističnog trokuta mnogokuta vrijedi:

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n},\ \beta_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

Zadatak 6. Konstruiraj pravilni mnogokut zadan brojem stranica *n* te:

a) vrhom *A* i središtem mnogokuta *S*.

n = 3 Koraci:

A

S

---

n = 4 Koraci:

A

S

Uoči:
Dijagonale kvadrata sijeku se pod pravim kutom.

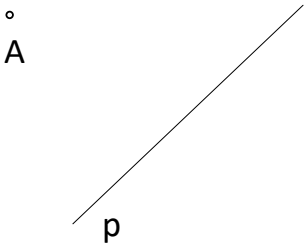
n = 5 Koraci:



b) odnosima među danim objektima.

n = 4 Koraci:

jedna stranica leži na pravcu p, a jedan vrh je u točki A.



Napomena: Uoči da rješenje nije jedinstveno.

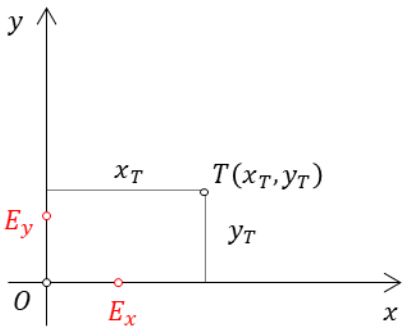
Zadatak 7. Četiri karakteristične točke trokuta

1. *središte opisane kružnice* – točka u kojoj se sijeku simetrale stranica trokuta
2. *središte upisane kružnice* – točka u kojoj se sijeku simetrale unutarnjih kutova trokuta
3. *težište* – točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.
4. *ortocentar* – točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta. Visina trokuta je dužina povučena okomito na stranicu iz nasuprotnog vrha.

Konstruiraj trokut ABC duljina stranica a = 12 cm, b = 10 cm, c = 8 cm. Odredi sve četiri karakteristične točke trokuta ABC.

RAVNINSKI KARTEZIJEV KOORDINATNI SUSTAV

Kartezijev koordinatni sustav ravnine sastoji se od dva orijentirana i međusobno okomita pravca *x* i *y* (**koordinatne osi**) na kojima su istaknute jedinične točke E_X i E_y. Os x nazivamo **os apscisa**. Os y nazivamo **os ordinata**. Sjecište O pravaca *x* i *y* nazivamo **ishodištem koordinatnog sustava**.



SLIKA 12 RAVNINSKI KOORDINATNI SUSTAV

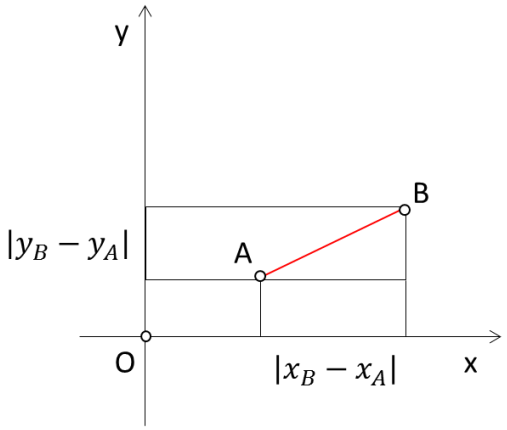
Svakoj točki T ravnine koordinatnog sustava pridružen je uređeni par realnih brojeva $T(x_T, y_T)$ koje nazivamo **koordinatama točke** T. Pridruživanjem koordinata točkama ravnine koordinatnog sustava određeno je bijektivno preslikavanje koje pruža osnovu za analitičko opisivanje geometrijskih pojmova, primjerice;

Udaljenost dviju točka (prava veličina dužine). Za dane dvije točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ udaljenost je određena sljedećom formulom

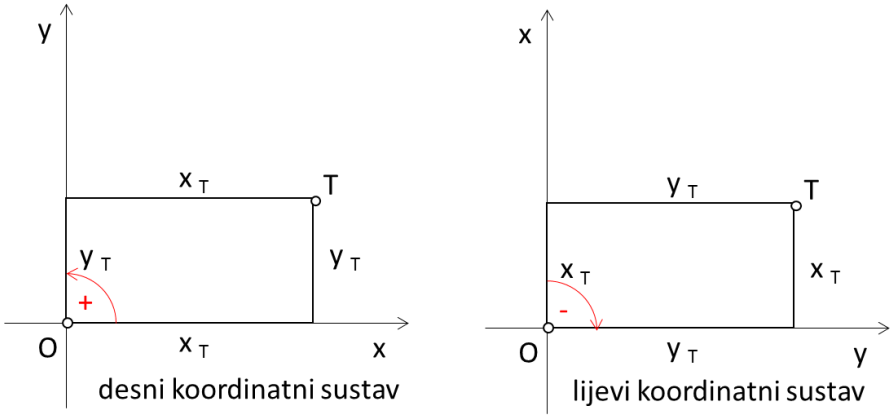
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

koja proizlazi iz Pitagorinog poučka.

Ovisno o orijentaciji kuta među koordinatnim osima, razlikujemo **lijevi** i **desni** ravninski koordinatni sustav. U desnom koordinatnom sustavu pozitivni dio x-osi prelazi u pozitivni dio y-osi kroz rotaciju za kut od +90° sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, a u lijevom za kut od -90°.



SLIKA 13 UDALJENOST DVIJU TOČAKA



SLIKA 14 LIJEVI I DESNI RAVNINSKI KOORDINATNI SUSTAV

TRANSFORMACIJE RAVNINE

Transformacijama ravnine geometrijske figure mogu promijeniti svoju veličinu, oblik i strukturu. Pri promatranju neke transformacije važno je uočiti čime se ono zadaje i koja su njena osnovna svojstva, primjerice postoje li neki „čvrsti (fiksni) elementi“ preslikavanja. Za element kažemo da je **čvrst element preslikavanja** ako se preslikava sam u sebe. U ravnini se mogu javiti fiksne točke preslikavanja i/ili fiksni pravci preslikavanja.

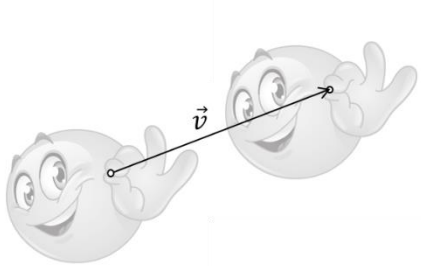
IZOMETRIJE. KONGRUENTNA PRESLIKAVANJA

U najvažnije transformacije ravnine ubrajamo ona preslikavanja kod kojih se ne mijenjaju udaljenosti među točkama. Budući da se pritom ne mijenja duljine dužina, ostaju kod takvih preslikavanja i veličine kuta nepromijenjene. Dakle, vrijedi ako $A \mapsto A', B \mapsto B'$, tada $d(A, B) = d(A', B')$, odnosno $|AB| = |A'B'|$.

Ovakva preslikavanja nazivamo **izometrijama ili kongruentnim preslikavanjima.** To su preslikavanja koja čuvaju veličinu i oblik figure u potpunosti. Ako postoji izometrija koja jednu figuru $\mathcal{F}$ preslikava u figuru $\mathcal{F}'$, kažemo da su figure $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ **sukladne figure**.

- TRANSLACIJA (POMAK)

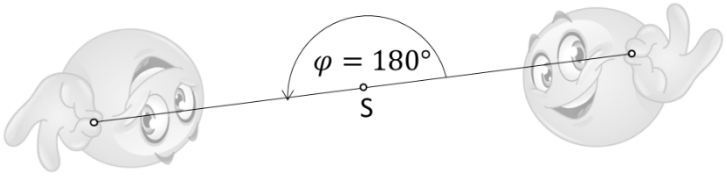
  Translacija se zadaje pomoću **vektora pomaka** $\vec{v}$. Ovim preslikavanjem svaki pravac prelazi u sebi paralelan pravac. Ovo preslikavanja općenito nema čvrstih elemenata, osim ako je zadani vektor pomaka nul-vektor.



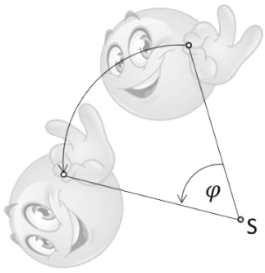
SLIKA 15 TRANSLACIJA

- ROTACIJA

  Rotacija se zadaje **središtem rotacije** S i **kutom rotacije** φ. Oznaka: (S, φ). Ukoliko je kut rotacije $\varphi = 180°$, tada govorimo o **centralnoj simetriji** sa središtem u S. Niti rotacija općenito nema čvrstih elemenata, osim ako je kut rotacije $360°$ ili neki njegov višekratnik.



SLIKA 16 CENTRALNA SIMETRIJA

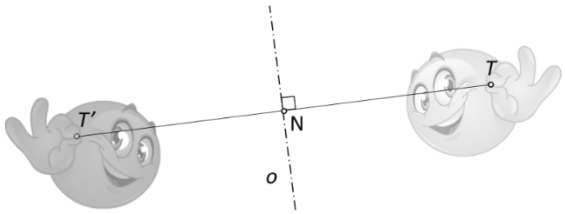


SLIKA 17 ROTACIJA

- OSNA SIMETRIJA (ZRCALJENJE)

  Zrcaljenje zadajemo pomoću **osi simetrije** *o*. Zrcalna slika točke T, točka T', se dobije postavljanjem okomice na os *o* i određivanjem nožišta N. Točka T' leži na pravcu NT i vrijedi $|\mathrm{TN}| = |\mathrm{T'N}|$.

  Čvrsti elementi preslikavanja su sve točke na osi simetrije, os simetrije te svi pravci okomiti na os simetrije.



SLIKA 18 OSNA SIMETRIJA

Napomena: Translacije i rotacije su takozvana **istosmjerna** preslikavanja, tj. smjer obilaženja vrhova mnogokuta se ne mijenja ovim preslikavanjima. Međutim, zrcaljenje je **protusmjerno** preslikavanje, tj. zrcaljenje mijenja smjer obilaženja vrhova mnogokuta.

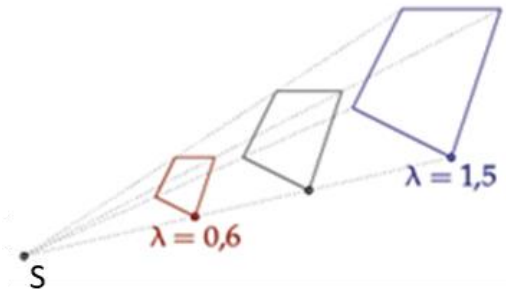
KONFORMNE TRANSFORMACIJE

Sljedeću klasu važnih transformacija čine ona preslikavanja kojima se ne mijenja mjera kuta. Takve preslikavanja nazivamo **konformnim transformacijama**. Uočimo da su sve izometrije ujedno i konformna preslikavanja[2]. Jednostavan primjer konformnog preslikavanja je i homotetija.

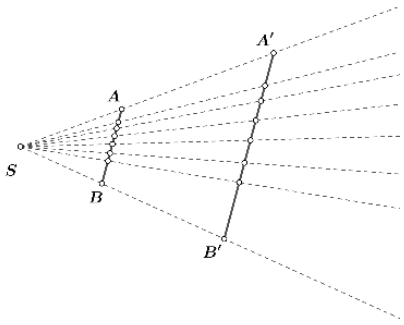
- HOMOTETIJA

  Homotetija se zadaje **središtem homotetije S** i **koeficijentom homotetije** λ (realnim brojem $\lambda \neq 0$). Slika točke T, točka T', se određuje na zraci ST pri čemu vrijedi $|\mathrm{ST'}| = |\lambda| \cdot |\mathrm{ST}|$.

  - Ukoliko je koeficijent $\lambda > 0$ točke T i T' nalaze se s iste strane točke S.
  - Za koeficijent homotetije $\lambda < 0$ točke T i T' nalaze se s različitih strana točke S.



SLIKA 19 HOMOTETIJA



Uoči da se pri preslikavanju homotetijom pravac preslikava u njemu paralelan pravac, a kut se preslikava u njemu sukladan kut. Omjeri točaka homotetijom se ne mijenjaju.

Specijalna homotetija određena koeficijentom $\lambda = -1$ podudara se s centralnom simetrijom s istim središtem. Također, ako je $\lambda = 1$ homotetija je identiteta, tj. svaki objekt se preslikava sam u sebe.

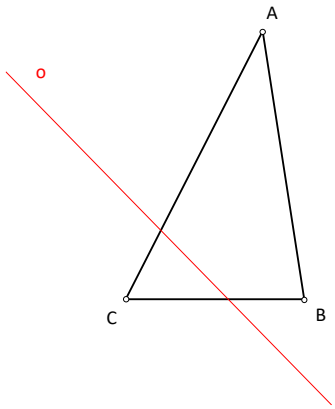
Homotetične figure su **slične figure**, oblik im je nepromijenjen, ali se njihova veličina, kao i položaj, mijenjaju.

[2] Obratna tvrdnja ne mora uvijek vrijediti: preslikavanja koja „čuvaju“ veličinu kuta, ne moraju „čuvati“ i duljinu dužina, tj. udaljenosti među točkama.

Zadatak 8. Geometrijske transformacije.

a) Neka je zadana os simetrije o. Konstruiraj osnosimetričnu sliku danog trokuta ABC.

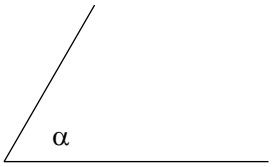
Koraci:

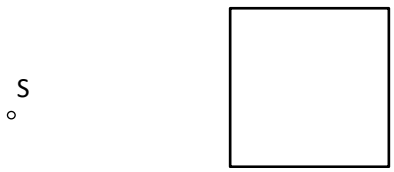


---

b) Neka je zadano središte S rotacije i kut α.
Odredi sliku danog kvadrata nakon rotacije (S, α).

Koraci:

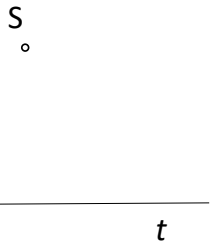




Zadatak 9.

Konstruiraj pravilni peterokut zadan središtem S ako mu jedna stranica leži na pravcu p.

Koraci:



KRUŽNICA

Kružnica *k* je skup svih točaka ravnine koje su od jedne čvrste točke S udaljene za čvrstu udaljenost *r,* tj.

$$k \coloneqq \{X\colon |XS| = r\}. \qquad \text{(K)}$$

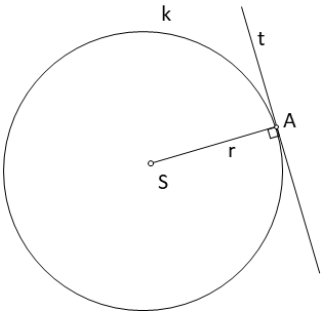
Broj *r* nazivamo **radijusom** ili **polumjerom kružnice**, a čvrstu točku S **središtem kružnice**.

Dio ravnine omeđen kružnicom nazivamo **krug** K, tj.

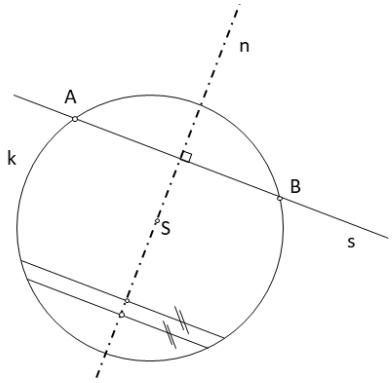
$$K \coloneqq \{X\colon |XS| \leq r\}.$$

Međusobni položaj kružnice i pravca. Ovisno o svom položaju prema kružnici, pravac može kružnicu sjeći u dvije točke (**sekanta**), dodirivati u jednoj točki (**tangenta**) ili nemati zajedničkih (realnih) točaka s danom kružnicom (**pasanta**). Vrijede sljedeće tvrdnje:

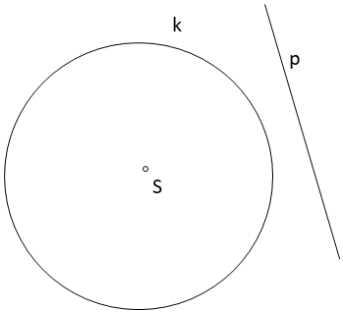
1. *Tangenta t u točki A kružnice k je okomita na polumjer r kružnice.*
2. *Simetrala dužine dviju točaka kružnice, A i B, je jedan promjer kružnice.*
3. *Promjer kružnice je ujedno skup polovišta međusobno paralelnih tetiva kružnice.*



tangenta *t* kružnice k u točki A



sekanta s kružnice k

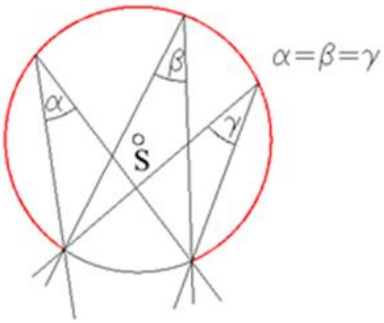


pasanta p kružnice k

- Dužina kojoj krajnje točke leže na kružnici naziva se **tetiva** kružnice.
- Najveću tetivu nazivamo **promjerom** ili **dijametrom** kružnice. Iste izraze koristimo i za njezinu duljinu.
- Svakom promjeru kružnice možemo jednostavno pridružiti njemu okomiti promjer pa govorimo o **paru okomitih promjera kružnice**. Svaka kružnica ima beskonačno mnogo parova okomitih promjera.

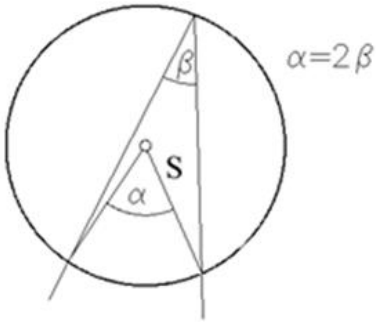
Prisjetit ćemo se još nekih pojmova vezanih uz kružnicu koje ćemo koristiti u kasnijim konstrukcijama.

- **Središnji kut** kružnice je kut čiji je vrh u središtu te kružnice, a **obodni kut** kružnice je kut čiji se vrh nalazi na kružnici i čiji kraci sijeku kružnicu. Vrijede sljedeće tvrdnje:



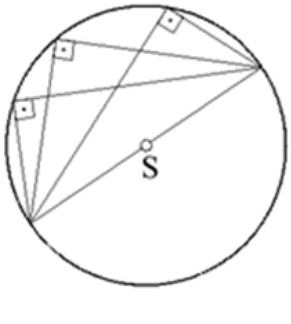
Poučak o obodnim kutovima nad istim lukom

Obodni kutovi nad istim lukom imaju jednake veličine



Poučak o središnjem i obodnom kutu nad istim lukom

Ako imamo središnji i obodni kut nad istim lukom, onda je središnji kut dva puta veći od obodnog kuta.

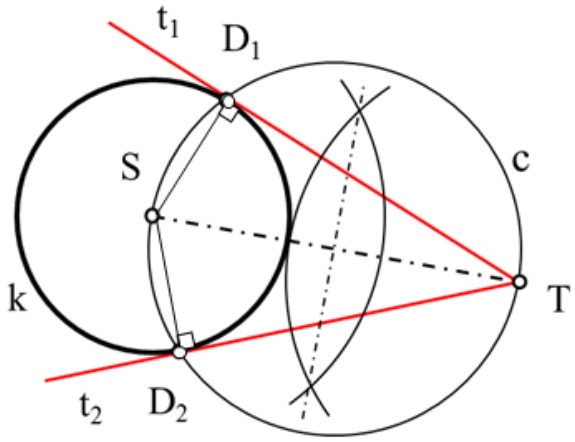


Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice

Obodni kut nad promjerom kružnice uvijek je pravi kut.

Tangente povučene iz točke na kružnicu. Ovisno o položaju neke točke prema kružnici, moguće je iz točke povući najviše dvije tangente na kružnicu.

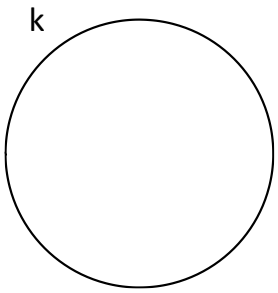
Uočimo da je prema Talesovom poučku o obodnom kutu kut $\sphericalangle SD_1\mathrm{T} = \sphericalangle SD_2\mathrm{T}$ pravi kut.



SLIKA 20 TANGENTE IZ TOČKE T NA KRUŽNICU K

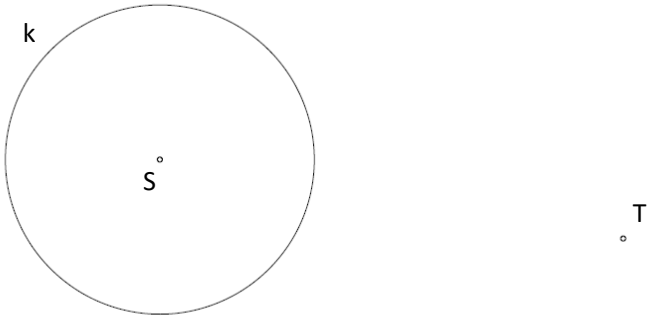
Zadatak 10.

a) Odredi središte dane kružnice k. Koraci:



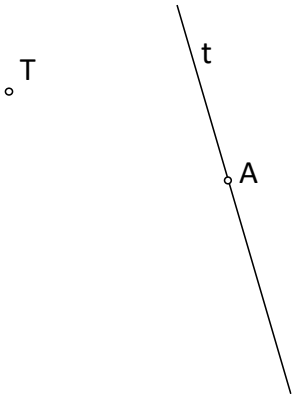
---

b) Konstruiraj tangente povučene iz točke T na danu kružnicu. Koraci:



---

c) Konstruiraj kružnicu *k* koja prolazi kroz točku T i dodiruje tangentu *t* u točki A. Koraci:



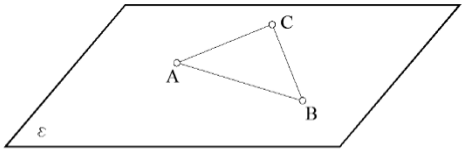
GEOMETRIJA PROSTORA (STEREOMETRIJA)

OSNOVE PROSTORNE GEOMETRIJE.

TOČKE, PRAVCI, RAVNINE. MEĐUSOBNI ODNOSI. PARALELNOST I OKOMITOST.

U prostoru uz **točke** i **pravce** javljaju se i **ravnine** kao osnovni elementi. I ovdje ćemo ponoviti samo najvažnije pojmove i činjenice.

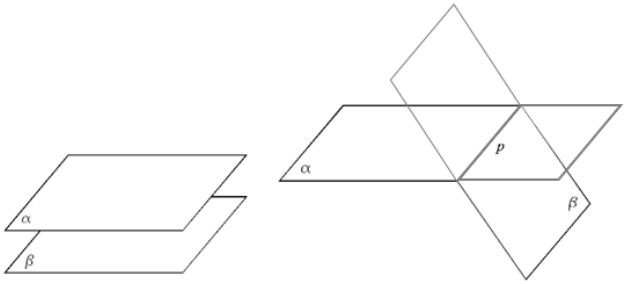
- ***Određenost ravnine*.**
  - Tri nekolinearne točke A, B, C određuju jednu jedinu ravninu ε koja prolazi kroz njih. Oznaka $\varepsilon = ABC$.
  - *Pravac i točka* koja ne leži na njemu određuju jednu jedinu ravninu.
  - *Dva paralelna pravca* određuju jednu jedinu ravninu.
  - *Dva ukrižena pravca* određuju jednu jedinu ravninu.



SLIKA 21 RAVNINA KROZ TRI TOČKE A, B, C

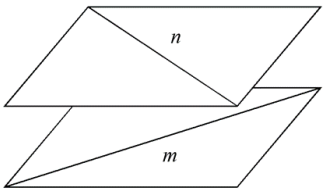
- Za točke ili pravce koji leže u istoj ravnini kažemo da su ***komplanarni.***

- ***Dvije ravnine*** α, β ***u prostoru*** mogu biti u jednom od dva položaja:
  - ili su paralelne, (oznaka: $\alpha \parallel \beta$)
  - ili se sijeku po jednom pravcu *p* koji nazivamo presječnicom ravnina α i β. (oznaka: $p = \alpha \cap \beta$).



SLIKA 22 PARALENE RAVNINE I RAVNINE KOJE SE SIJEKU

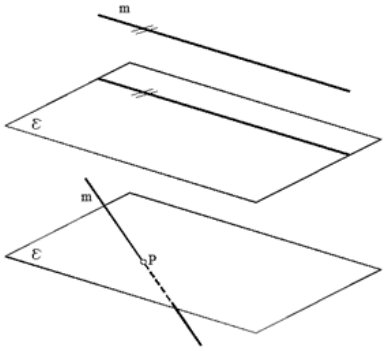
- ***Dva pravca*** *m*, *n* ***u prostoru*** mogu ili ležati u istoj ravnini, ili ne. U prvom slučaju pravci su ili paralelni, ili ukriženi. U drugom slučaju govorimo o **mimoilaznim ili mimosmjernim pravcima.**



SLIKA 23 MIMOILAZNI PRAVCI

- Neki pravac *m* i ravnina ε mogu:
  - ili biti međusobno paralelni $(m \| \varepsilon)$ – pravac i ravnina su paralelni ako pravac leži u ravnini, ili leži u njoj paralelnoj ravnini, tj. nema zajedničkih točaka s ravninom.
  - ili se sjeći u jednoj točki P koju nazivamo **probodištem pravca** *m* s **ravninom** ε (oznaka: $P = m \cap \varepsilon$).

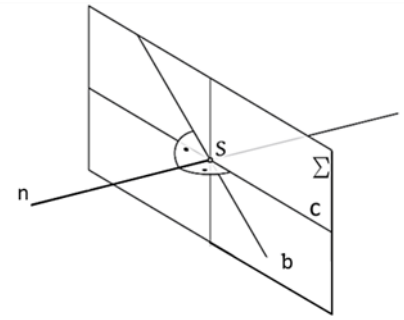
Ako neka točka T leži na pravcu *m* jedne ravnine ε, tada kratko pišemo $P \in m$, tj. $P \in \varepsilon$. Leži li neki pravac m u jednoj ravnini ε, tada koristimo oznaku $m \subset \varepsilon$.



SLIKA 24 PRAVAC I RAVNINA U PROSTORU

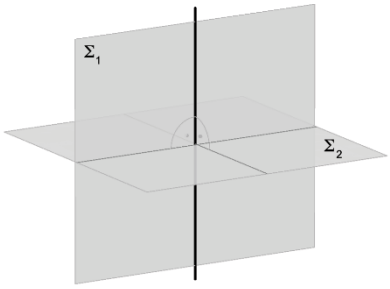
- ***Okomitost pravca i ravnine***
  Ako je pravac n okomit na neku ravninu Σ zapisujemo $n \perp \Sigma$. Pravac okomit na ravninu nazivamo **normalom ravnine,** a njegovo probodište S nazivamo **nožištem normale *n***.

  Uoči, ako je pravac okomit na ravninu, tada je on okomit na sve pravce te ravnine.



SLIKA 25 NORMALA n RAVNINE Σ

- ***Okomitost dviju ravnina***
  Ako su dvije ravnine α, β međusobno okomite zapisujemo $\alpha \perp \beta$. Dvije su ravnine međusobno okomite ako jedna sadrži barem jedan pravac okomit na drugu ravninu.

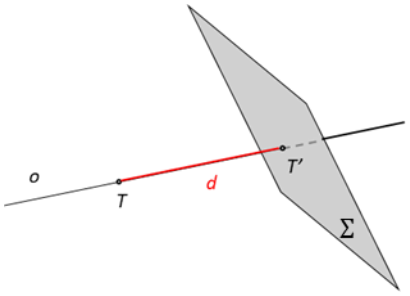


SLIKA 26 DVIJE OKOMITE RAVNINE

UDALJENOSTI I KUTOVI PROSTORNIH ELEMENATA.

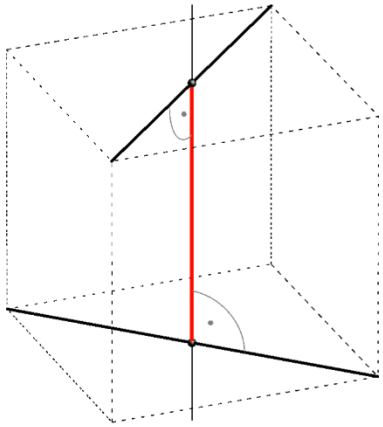
- **Udaljenost točke T od ravnine** Σ je udaljenost točke T od njezina nožišta, točke T '.

- **Udaljenost pravca p od njemu paralelne ravnine** Σ je udaljenost bilo koje njegove točke T od te ravnine.
  Ako pravac siječe ravninu, udaljenost je 0.



SLIKA 27 UDALJENOST TOČKE T OD RAVNINE Σ

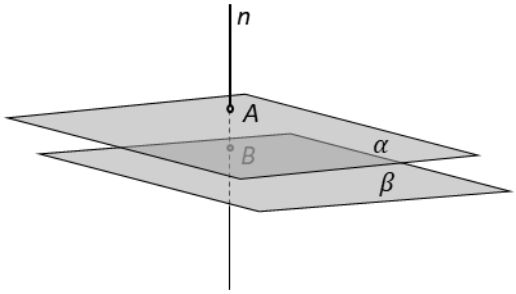
- **Udaljenost između dva pravca** ovisi o međusobnom položaju dvaju pravaca**:**
  - Ako se pravci sijeku, njihova je udaljenost 0.
  - Ako su pravci paralelni, njihova je udaljenost jednaka udaljenosti bilo koje točke jednog pravca od njezine ortogonalne projekcije na drugi pravac.
  - Ako su pravci mimosmjerni, postoji jedinstveni pravac okomit na oba koji ih siječe. Taj pravac nazivamo zajedničkom normalom mimosmjernih pravaca. Udaljenost mimosmjernih pravaca jednaka je udaljenosti njihovih sjecišta sa zajedničkom normalom.



SLIKA 28 UDALJENOST MIMOSMJERNIH PRAVACA

- **Udaljenost ravnine** α **od njoj paralelne ravnine** β je udaljenost bilo koje točke A ravnine α od ravnine β.
  Ako se ravnine sijeku, udaljenost je 0.

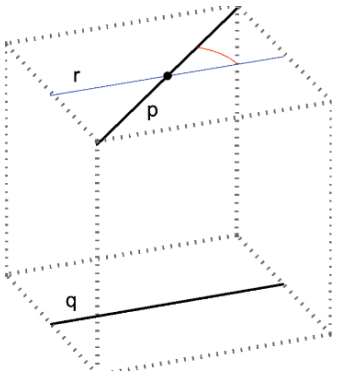
  Udaljenost dviju paralelnih ravnina možemo odrediti i kao udaljenost između po volji odabrane točke A ravnine α i njezine ortogonalne projekcije B na ravninu β.



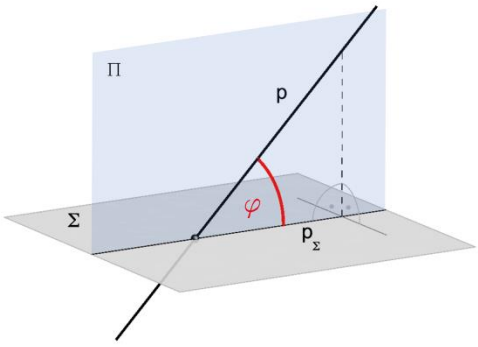
SLIKA 29 UDALJENOST DVIJU PARALELNIH RAVNINA

KUT PRAVCA I RAVNINE. KUT DVIJU RAVNINA.

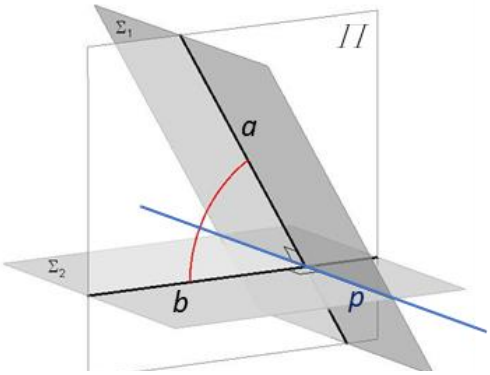
- **Kut koji zatvaraju dva mimosmjerna pravca p i q** je kut koji zatvara pravac p i s njim ukriženi pravac r paralelan s danim pravcem q.



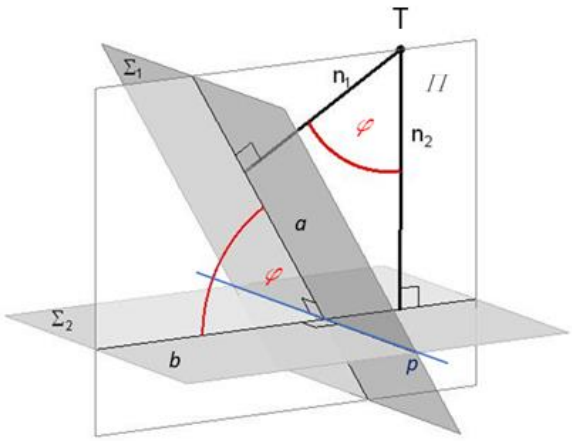
- **Kut koji zatvaraju pravac** p i **ravnina** Σ je kut φ koji zatvaraju pravci p i p_Σ. Pravac p_Σ određen je kao presječnica ravnina Σ i pravcem p položene ravnine Π okomito na ravninu Σ.



- **Kut dviju ravnina** Σ_1, Σ_2 definiramo pomoću kuta između dva posebno odabrana ukrižena pravca *a* i *b.*
  Pravci $a \subseteq \Sigma_1$ i $b \subseteq \Sigma_2$ okomiti su na presječnicu *p* tih dviju ravnina. Možemo ih odrediti koristeći pomoćnu ravninu Π koju postavimo tako da vrijedi:
  $(\Pi \perp \Sigma_1)$ i $(\Pi \perp \Sigma_2)$, odnosno $\Pi \perp p$.



SLIKA 30 KUT IZMEĐU DVIJE RAVNINE Σ_1, Σ_2



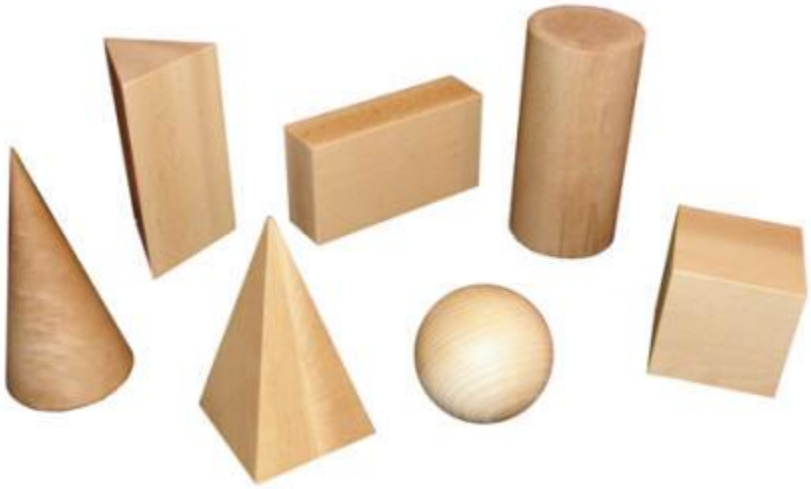
SLIKA 31 ODREĐIVANJE KUTA IZMEĐU RAVNINA Σ_1, Σ_2 POMOĆU NORMALA n_1, n_2 RAVNINA

Kut između dviju ravnina možemo odrediti i pomoću normala danih dviju ravnina. Odaberemo li po volji točku T u prostoru i postavimo li kroz nju normalu n_1 na ravninu Σ_1 te normalu n_2 na ravninu Σ_2, tada je kut koji zatvaraju ukrižene normale $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2$ ravnina Σ_1, Σ_2 jednak kutu između ravnina Σ_1, Σ_2, tj. vrijedi

$$\measuredangle(\Sigma_1, \Sigma_2) = \measuredangle(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2).$$

GEOMETRIJSKA TIJELA

Geometrijsko tijelo je dio prostora omeđen sa svih strana ravnim ili zakrivljenim plohama. Tijela omeđena samo ravnim plohama nazivamo **poliedrima** ili **uglatim tijelima**. Ako je barem jedna od ploha koje omeđuju tijelo zakrivljena, govorimo o **oblim tijelima**.



Plohe prikazujemo pomoću njihovih elemenata, njihovih vrhova, bridova i kontura. Prisjetimo se nekih pojmova vezanih uz geometrijska tijela.

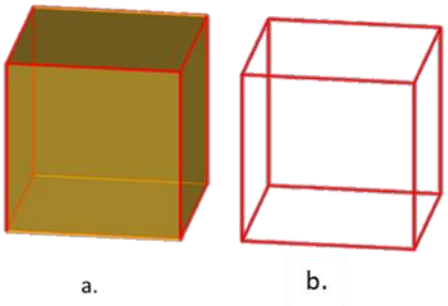
POLIEDRI (UGLATA TIJELA)

Plohe poliedra određene su mnogokutima čiju unutrašnjost nazivamo **stranama** poliedra. Bridovi i vrhovi ovih mnogokuta određuju **bridove** i **vrhove** poliedra. Poliedri posjeduju prostorne i ravninske dijagonale. **Ravninske dijagonale** poliedra su dužine koje spajaju dva vrha jedne strane poliedra, tj. dijagonale strana (mnogokuta) poliedra, a **prostorne dijagonale** su dužine koje spajaju dva vrha na različitim stranama poliedra.

Istaknimo još da se dvije strane poliedra ne mogu sjeći po unutrašnjosti mnogokuta. Na taj način trodimenzionalni prostor je pomoću poliedra podijeljen na dva područja, omeđenu **unutrašnjost** i neomeđenu **vanjštinu** poliedra.

Napomena[3]:

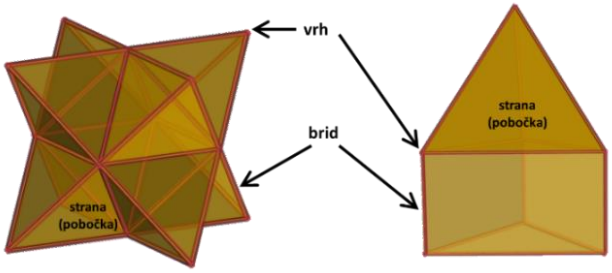
- Svakom poliedru možemo pridružiti **volumen,** promatrajući ga kao čvrsto tijelo (3-dim figura) (slika a.).
- Svakom poliedru možemo pridružiti i plašt kojim određujemo mrežu poliedra. Zbroj površina svih strana poliedra određuje **oplošje poliedra** (slika a.). Kocka kao ploha određena je sa 6 sukladnih kvadrata.
- Svaki poliedar možemo jednoznačno odrediti i njegovim vrhovima i bridovima, zadajući na taj način **mrežni model** (eng. **Wireframe**) poliedra (slika b.) (1-dim figura). Ovakvom modelu poliedra ne možemo odrediti niti oplošje, niti volumen. Kemijske veze među atomima se često prikazuju korištenjem mrežnih modela poliedara.



SLIKA 32 RAZLIČITI PRIKAZI GEOMETRIJSKE FIGURE KOCKE

[3] Matematički i geometrijski pojmovi trebali bi biti jasni i jednoznačno određeni. Pa ipak, mnogi geometrijski pojmovi se koriste dvosmisleno ponajprije zbog svoje duge povijesne uloge i višestruko primjene u različitim znanstvenim i životnim područjima te se stoga ne mogu jednoznačno definirati.

I poliedri, poput mnogokuta, mogu biti konveksni i nekonveksni (konkavni). **Konveksni poliedar** leži samo s jedne strane ravnine svake svoje strane. Konkveksnim poliedrima sve prostorne dijagonale leže u unutrašnjosti.



SLIKA 33 LIJEVO: NEKOVEKSNI POLIEDAR DESNO: KONVEKSNI POLIEDAR

Uočimo da vrijedi sljedeće:

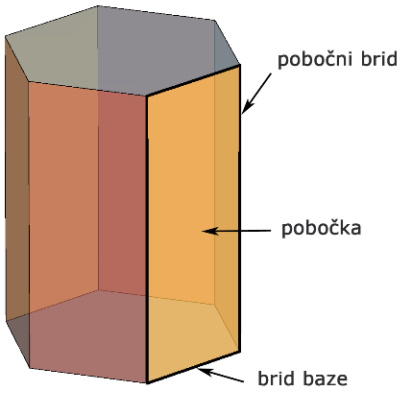
S*vaki vrh poliedra leži na najmanje tri strane poliedra i sadržan je u najmanje tri brida poliedra.*

Za konveksne poliedre Leonard Euler (1707. – 1783.) uočio je poveznicu između brojeva vrhova, bridova i strana poliedra. Ova poveznica poznata je kao **Eulerova formula za poliedre** i glasi

broj vrhova – broj bridova + broj strana = 2

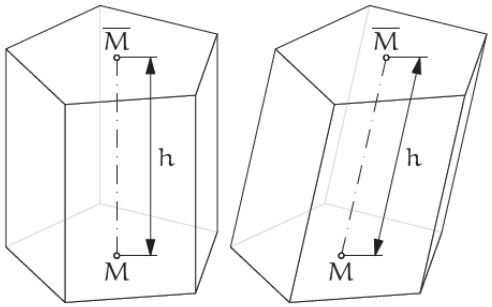
odnosno ako označimo broja vrhova V, bridova B i strana S, tada vrijedi **V – B + S = 2.** Primjerice, 4-strana prizma ima 8 vrhova, 12 bridova i 6 stana i vrijedi 8 – 12 + 6 =2.

PRIZME



Prizma je poliedar određen s dva sukladna poligona koji leže u paralelnim ravninama i imaju paralelne odgovarajuće stranice. Sukladne poligone $A_1A_2 \dots A_n$, $B_1B_2 \dots B_n$ nazivamo **bazama** ili **osnovkama prizme**, a ostale strane nazivamo **pobočnim stranama** ili **pobočkama** prizme. Bridovi na osnovkama su osnovni bridovi prizme, a bridovi u kojima se sastaju dvije pobočke nazivaju se pobočni bridovi. Udaljenost *v* ravnina baza određuje visinu prizme.

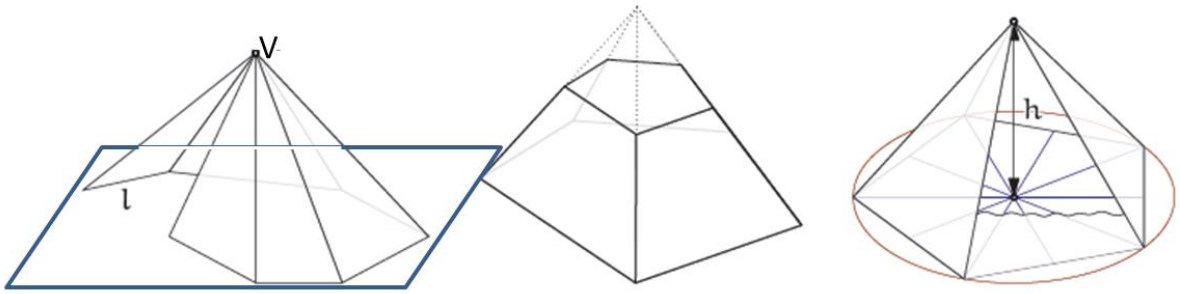
Ovisno o kutu koji zatvaraju pobočni bridovi s ravninom osnovke razlikujemo:



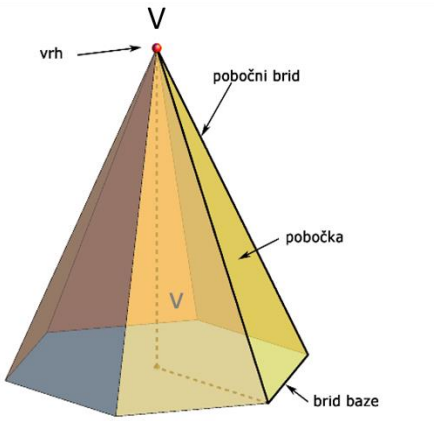
- *uspravne prizme* kod kojih su pobočni bridovi prizme okomiti na ravninu osnovke. Svi pobočni bridovi uspravne prizme jednaki su njenoj visini, a njene pobočke su pravokutnici i vrijedi v = h, gdje je h duljina pobočnog brida.
- *kose prizme* ako pobočni bridovi nisu okomiti na ravninu osnovke. Svi pobočni bridovi kose prizme međusobno su paralelni, a njene pobočke su paralelogrami i vrijedi v < h.

Prizma je n-terostrana ako joj je baza n-terokut. **Pravilna n-terostrana prizma** je uspravna prizma kojoj je osnovka pravilni n-terokut. Prizma kojoj su baze paralelogrami zove se **paralelepiped**.

PIRAMIDE



Piramida je poliedar određen spojnicama konveksnog poligona $A_1A_2 \dots A_n$ koji leži u nekoj ravnini i još jedne točke V izvan te ravnine. To je poliedar omeđen jednim poligonom i trokutima.

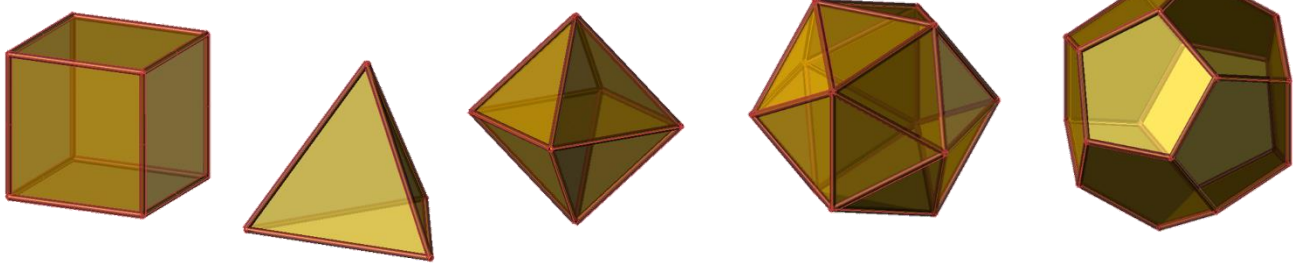


Poligon $A_1A_2 \dots A_n$ nazivamo **bazom** ili **osnovkom piramide**, a točku V **vrhom piramide**. Spojnice vrha V s vrhovima baze nazivaju se **pobočni bridovi piramide**. Udaljenost vrha V od ravnine baze određuje visinu v piramide.

Piramida je n-terostrana ako joj je baza n-terokut. **Pravilna n-terostrana piramida** je piramida kojoj je osnovka pravilni n-terokut sa središtem S, a spojnica vrha V i središta S osnovke okomita je na bazu piramide. Pobočke pravilne piramide su jednakokračni trokuti.

PRAVILNI POLIEDRI (PLATONOVA TIJELA)

Poliedar čije su sve strane pravilni međusobno sukladni mnogokuti i čiji su svi prostorni kutovi sukladni naziva se **pravilnim poliedrom**. Pravilni konveksni poliedri nazive su dobili prema broju svojim strana. Zajednički ih nazivamo još i **Platonovim tijelima**. Postoji točno pet različitih Platonovih tijela:



heksaedar (kocka)
6 strana

(pravilni[4])
tetraedar
4 strane

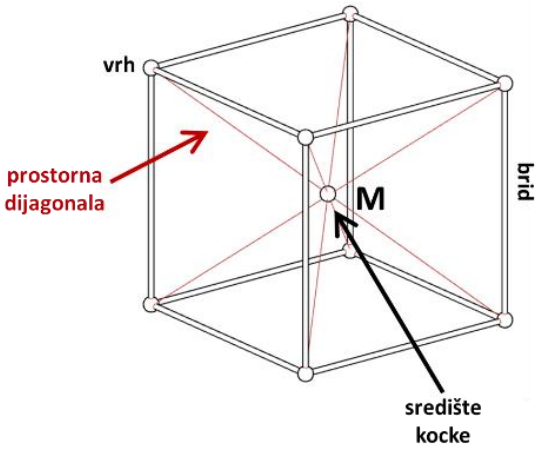
oktaedar
8 strana

dodekaedar
12 strana

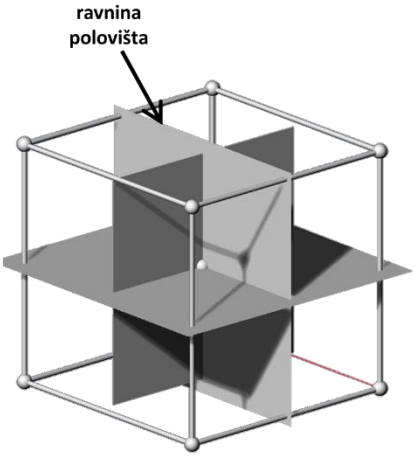
ikozaedar
20 strana

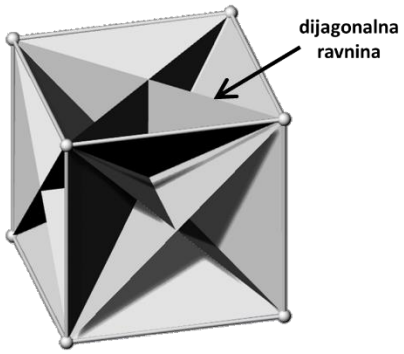
[4] U nekim znanstvenim područjima pod pojmom tetraedar podrazumijeva trostrana piramida, tj. tijelo omeđeno četirima trokutima pa se stoga posebno ističe pravilni tetraedar u slučaju kada su sva 4 trokuta jednakostranična i međusobno sukladna. U matematici ćemo pod pojmom tetraedar podrazumijevati Platonovo tijelo.

Kocka (heksaedar)



Kocka ima 8 vrhova, 6 sukladnih (kongruentnih) kvadrata koji određuju njegove strane te 12 bridova. U svakom vrhu spajaju se po tri brida od kojih su po dva međusobno okomita.



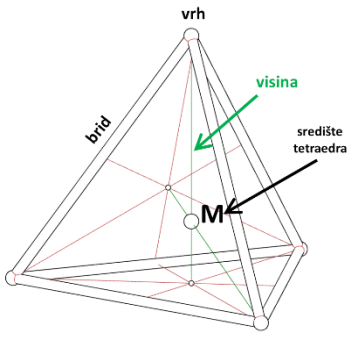


Osim toga kocka ima 1 središte, točku M, 4 prostorne dijagonale, 3 **ravnine polovišta** i 6 ravnina dijagonala (**dijagonalna ravnina –** sadrži 1 prostornu dijagonalu kocke i okomita je na 2 nasuprotne strane kocke). Ove ravnine određuju ravnine simetrije kocke.

SLIKA 34 KOCKA: 9 RAVNINA SIMETRIJE KOCKE

Tetraedar

Tetraedar ima 4 vrha, 4 sukladna (kongruenta) jednakostranična trokuta koji određuju njegove strane te 6 bridova. U svakom vrhu spajaju se po tri brida.



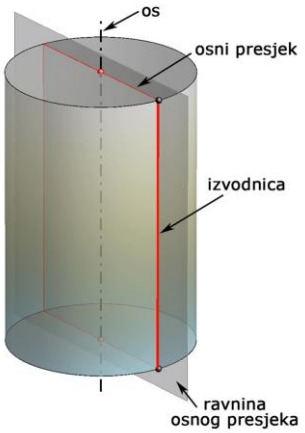
Osim toga tetraedar ima 1 središte, točka M, i 4 visine. Pod visinom tetraedra podrazumijevamo okomite pravce položene iz svakog vrha na nasuprotnu stranu tetraedra. Sve četiri visine tetraedra prolaze kroz središte tetraedra i sijeku nasuprotnu stranu u njezinu središtu, tj. središtu jednakostraničnog trokuta.

OBLA TIJELA

Tijela omeđena barem jednom zakrivljenom plohom nazivamo oblim tijelima. Najpoznatija obla tijela su valjak, stožac i sfera.

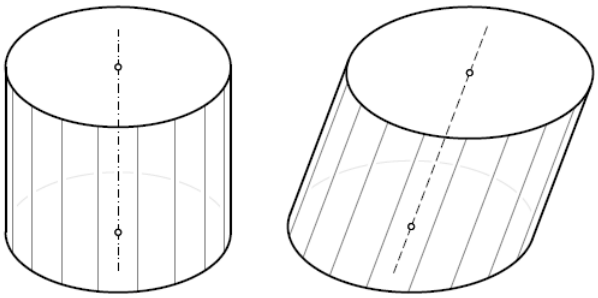
VALJCI

Valjak je oblo geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim krugovima, smještenim u paralelnim ravninama koji se zovu **baze** ili **osnovke valjka** i plaštom valjka. **Plašt valjka** je zakrivljena ploha određena kružnicama baza k_1 i k_2 i čine ga sve dužine $\overline{T_1T_2}$ usporedne s osi valjka pri čemu vrijedi $T_1 \in k_1$ i $T_2 \in k_2$. Os valjka je dužina koja spaja središta osnovaka valjka. Spojnice T_1T_2 nazivamo **izvodnicama** valjka.



Udaljenost jedne od druge osnovke valjka zove se **visina** valjka.

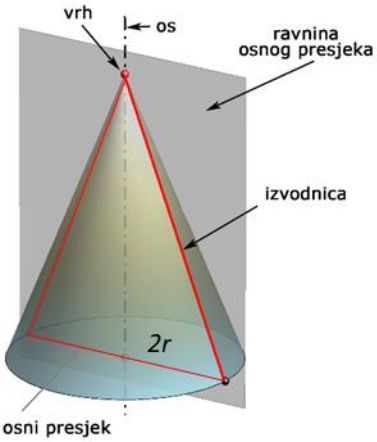
- Valjak je **uspravan**, kada su njegove izvodnice okomite na njegove osnovke.
- Valjak je **kosi**, ako su njegove izvodnice kose prema osnovci.



Uspravni valjak može nastati i rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice pa se zbog toga zove i **rotacijski valjak**. Kada je visina rotacijskog valjka jednaka promjeru njegove osnovke, valjak nazivamo **istostranim valjkom**.

STOŠCI

Stožac je oblo geometrijsko tijelo omeđeno krugom K i zakrivljenom plohom što ju čine sve dužine VT, gdje je $T \in K$, a V čvrsta točka izvan ravnine kruga K. Krug K nazivamo **bazom** ili **osnovkom stošca**, zakrivljenu plohu **plaštom stošca**, a spojnice VT **izvodnicama stošca**. Spojnicu središta baze S i vrha stošca nazivamo **os stošca**.



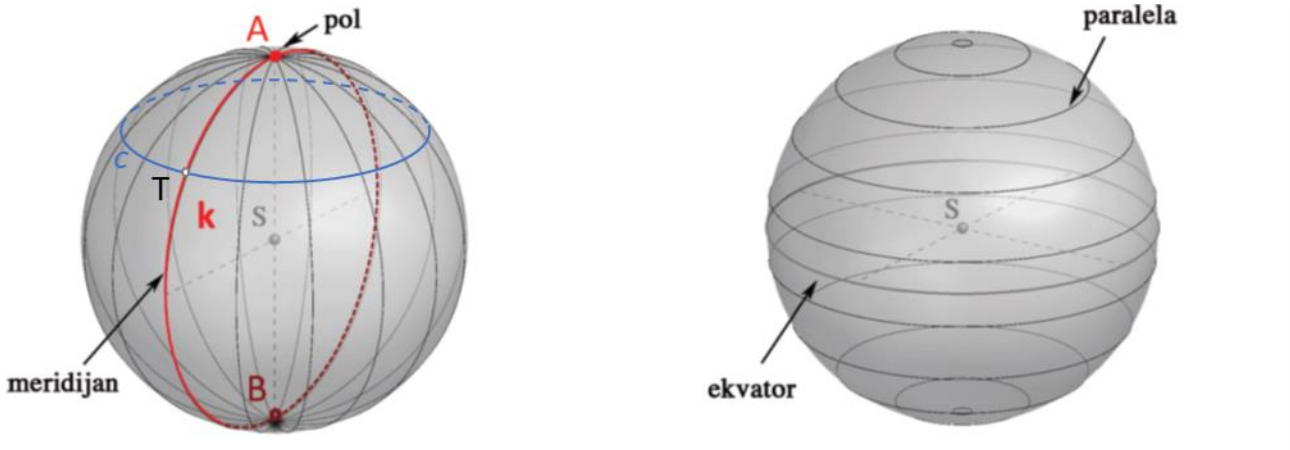
Stožac je **uspravan**, ako je os okomita na ravninu njegove osnovke. U suprotnom je riječ o **kosom stošcu**. Uspravni kružni stožac može nastati i rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete pa se zbog toga zove i **rotacijski stožac**. **Istostrani stožac** je rotacijski stožac kojemu je svaka izvodnica duljine promjera osnovke. Njegov osni presjek je jednakostranični trokut.

Presjek stošca ravninom koja prolazi njegovom osi zove se **osni presjek stošca**. Osni presjeci rotacijskog stošca su sukladni jednakokračni trokuti, a osni presjeci kosog kružnog stošca su raznostranični trokuti.

SFERE

Sfera je skup točaka prostora koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke S. Točku S nazivamo **središtem sfere**, a mjerni broj r udaljenosti označava **polumjer ili radijus sfere**.

Dio prostora omeđen sferom zove se **kugla**.



- Dužina koja spaja dvije točke na sferi, zove se **tetiva**. Najveće tetive prolaze središtem sfere i zovu se **promjeri**.

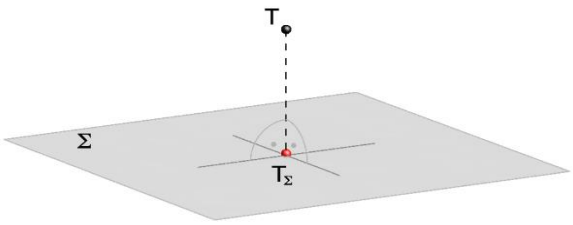
- Svi promjere sfere su duljine 2r . Promjer AB zove se **os sfere**, a krajnje točke tog promjera zovu se **polovi**. Svaki se promjer može smatrati osi sfere.

- Svi ravninski presjeci sfere su kružnice. Presječne kružnice mogu imati promjer manji ili jednak promjeru sfere. Ako ravnina presjeka prolazi središtem sfere, tada presječnu kružnicu nazivamo **glavnom kružnicom sfere** i njezin je promjer 2r.

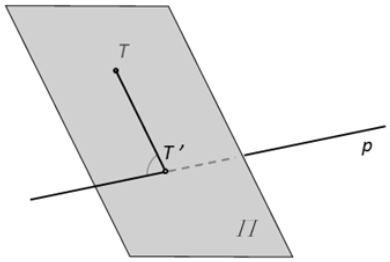
- Neka je AB jedna os sfere. Glavne kružnice sfere koje prolaze polovima sfere, nazivamo **meridijanima** određenim polovima A, B. Rotacijom oko osi AB, svaka točka T jedne glavne kružnice *k* opiše kružnicu *c* kojoj je središte na osi AB i kojoj je ravnina okomita na AB. Ravnine svih tih kružnica su međusobno paralelne (usporedne) pa se te kružnice nazivaju **paralele** ili **usporednici**. Najveća se paralela zove **ekvator**.

PRAVOKUTNA ILI ORTOGONALNA PROJEKCIJA

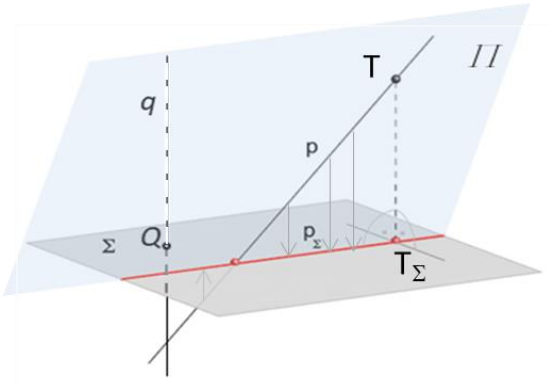
- **Ortogonalna projekcija točke** T **na ravninu** Σ je sjecište T_Σ okomice na Σ kroz točku T i ravnine Σ.



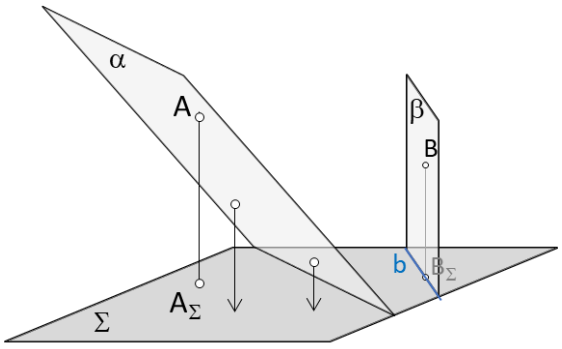
- **Ortogonalna projekcija točke** T **na pravac** *p* je sjecište T′ pravca p i ravnine Π okomite na *p* položene kroz točku T.



- **Ortogonalna projekcija pravca na ravninu** Σ **je:**
  - točka Q, probodište pravca q i ravnine Σ, ako je pravac q okomit na ravninu Σ.
  - pravac p_Σ određen kao skup ortogonalnih projekcija točaka T ∈ p na ravninu Σ.
    Pravac p_Σ je ujedno presječnica ravnine Σ i ravnine Π položene pravcem p okomito na Σ.



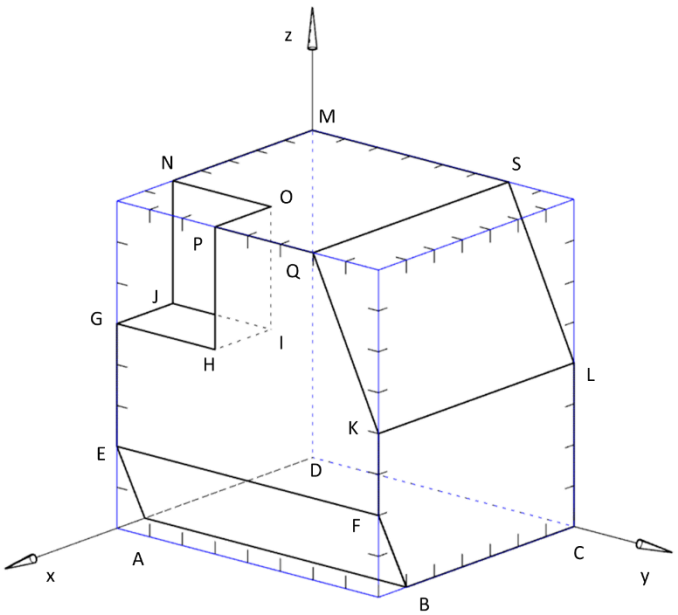
- **Ortogonalna projekcija ravnine na ravninu** Σ **je:**
  - ravnina projekcije Σ određena kao skup ortogonalnih projekcija točaka T ∈ α na ravninu Σ, ako je ravnina α koso položena na ravninu Σ.
  - pravac b određen kao skup ortogonalnih projekcija točaka T ∈ β na ravninu Σ, ako je na β okomita na ravninu Σ. Pravac b je ujedno presječnica ravnine Σ i na nju okomite ravnine β.



Zadatak 11.

Promotri dani objekt i provjeri jesu li sljedeće tvrdnje točne (T) ili netočne (N).

	T	N
a) Dužina HP je paralelna s ravninom BCL.		
b) Pravac AE leži koso prema ravnini CDM.		
c) Dužine AB i SL međusobno su paralelne.		
d) Pravci HP i KQ su mimosmjerni.		
e) Ravnine HPQ i CDS međusobno su paralelne.		
f) Pravac GH je paralelan s ravninom AEF.		
g) Pravac GH je paralelan s pravcem OS.		
h) Pravac CK je paralelan s ravninom GJN.		
i) Pravci CK i BF su mimosmjerni.		
j) Ravnine CDM i GHP međusobno su paralelne.		
k) Ravnina KLS paralelna je s x-osi.		
l) Pravac QS paralelan je s x-osi.		



Zadatak 12.
Promotri dani objekt i nadopuni sljedeće rečenice:

a) Ortogonalna projekcija točke K na ravninu EFG je _____.

b) Ortogonalna projekcija točke A na pravac EF je _____.

c) Ortogonalna projekcija pravca FG na ravninu CDG je _____.

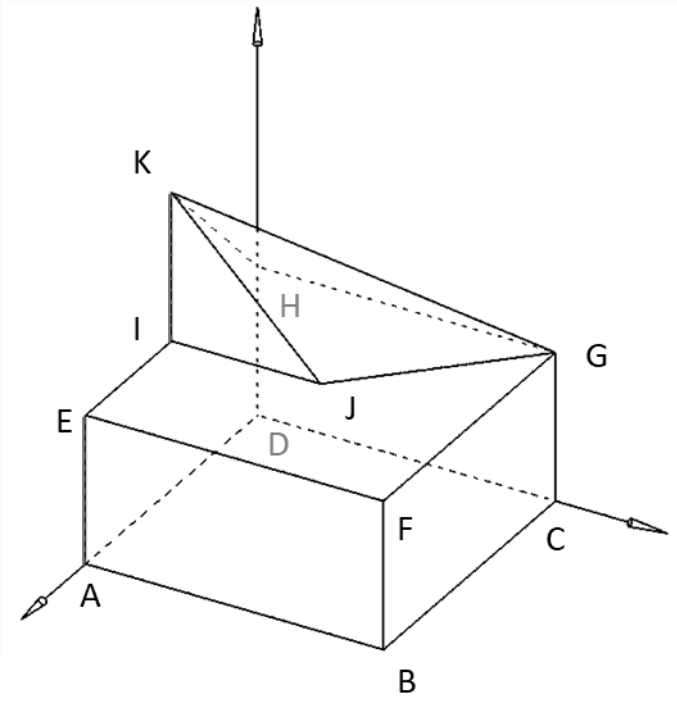
d) Ortogonalna projekcija pravca FG na ravninu ABC je _____.

e) Ortogonalna projekcija pravca KJ na ravninu EFG je _____.

f) Ortogonalna projekcija ravnine ABF na ravninu ABC je _____.

g) Ortogonalna projekcija ravnine ABF na ravninu CDG je _____.

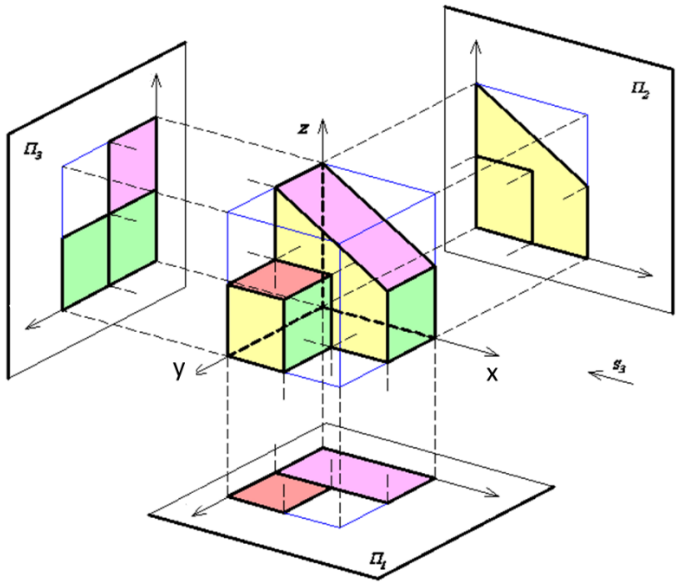
h) Ortogonalna projekcija ravnine GJK na ravninu EAD je _____.

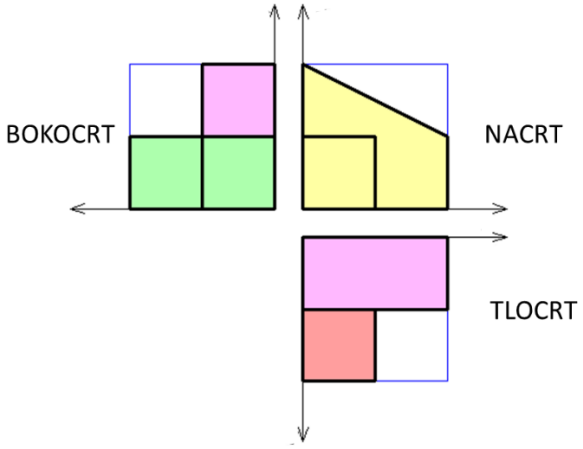


Zadatak 13. **Glavne projekcije**

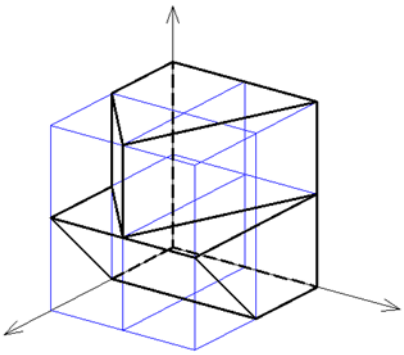
Ortogonalne projekcije prostora duž koordinatnih osi nazivaju se glavnim projekcijama.

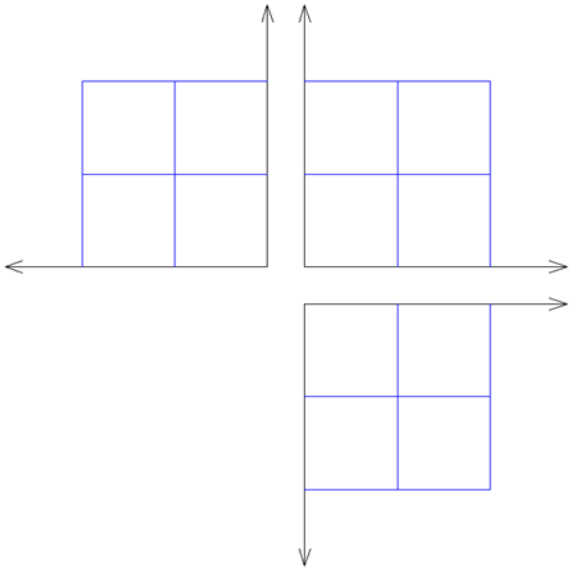
- Tlocrt – ortogonalna projekcija na ravninu Π_1 koja je ili paralena ili identična xy-ravnini.
- Nacrt – ortogonalna projekcija na ravninu Π_2 koja je ili paralena ili identična xz-ravnini.
- Bokocrt – ortogonalna projekcija na ravninu Π_3 koja je ili paralena ili identična yz-ravnini.





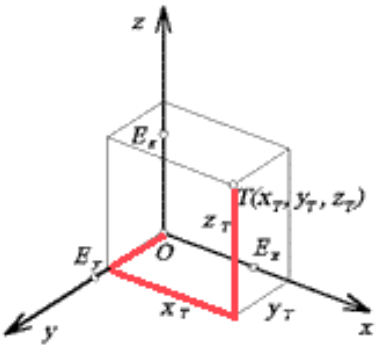
Pažljivo promotri gornji crtež i odredi glavne projekcije zadanog objekta.





PROSTORNI KARTEZIJEV KOORDINATNI SUSTAV

Kartezijev koordinatni sustav u prostoru sastoji se od točke O, **ishodišta**, te tri orijentirana, međusobno okomita pravca *x, y, z* (**koordinatne osi**) kroz O. Ravnine određene bilo kojim dvjema osima, tj. xy-, yz- i xz- ravnina nazivat ćemo **koordinatnim ravninama**. Kvadar određen prostornom dijagonalom $\overline{OT}$ i stranicama paralelnim s koordinatnim osima nazivat ćemo **koordinatnim kvadrom** točke T.



SLIKA 35 KARTEZIJEV KOORDINATNI SUSTAV. KOORDINATNI PUT TOČKE T

Svakoj točki T prostora možemo pridružiti jedinstveni koordinatni kvadar zajedno s **koordinatnim putom** određenim bridovima kvadra s početnom točkom u ishodištu O i završnom točkom T. Slika desno prikazuje jedan od šest mogućih koordinatnih putova točke T. Dužine jednog ovakvog koordinatnog puta određuju tri orijentirane duljine x_T, y_T, z_T paralelne s koordinatnim osima. Duljine x_T, y_T, z_T nazivamo **koordinatama** točke T. Ovo pridruživanje opisujemo kroz zapis:

$$T(x_T, y_T, z_T).$$

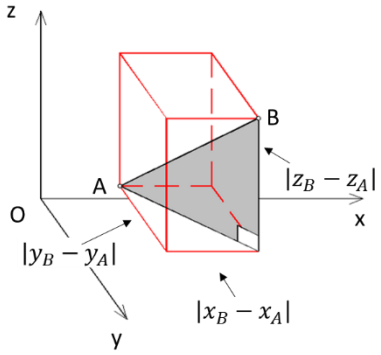
Obrnuto, možemo svakoj uređenoj trojci (x_T, y_T, z_T) pomoću jednog od šest mogućih koordinatnih putova pridružiti točno jednu točku T.

Ova identifikacija točke T prostora s uređenom trojkom brojeva pruža osnovu za matematičko opisivanje geometrijskih sadržaja. Pokažimo to ponovno na jednom jednostavnom primjeru.

Udaljenost dviju točka (prava veličina dužine). Za dane dvije točke $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$ udaljenost je određena sljedećom formulom

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

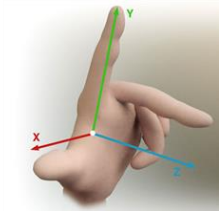
koja proizlazi iz duljine prostorne dijagonale kvadra određenog točkama A, B čije stranice su paralelne s koordinatnim osima.



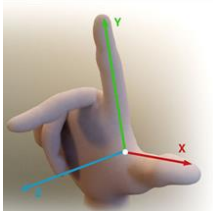
SLIKA 36 UDALJENOST DVIJU TOČAKA U PROSTORU

Kao i u ravninskom slučaju, razlikujemo **lijevi** i **desni prostorni koordinatni sustav**.

Kod desnog (lijevog) sustava koordinatne osi x, y, z su redom orijentirane kao prva tri prsta (palac, kažiprst, srednji prst) desne (lijeve) ruke. U našoj skripti koristit ćemo u pravilu lijevi pravokutni koordinatni sustav.



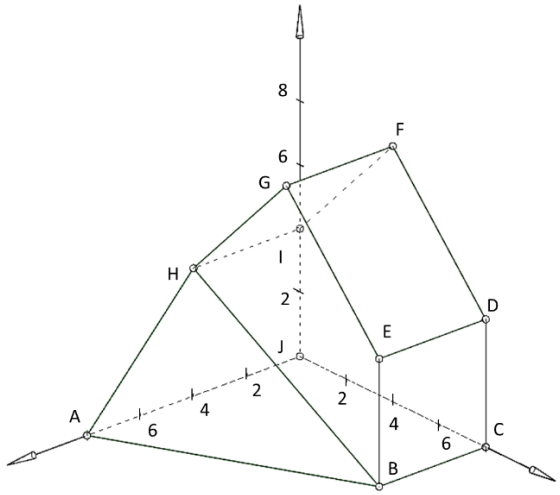
SLIKA 37 LIJEVI SUSTAV

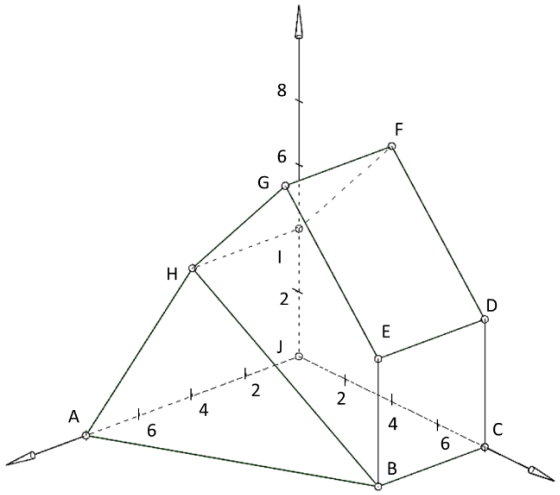


SLIKA 38 DESNI SUSTAV

Zadatak 14.

Odredite koordinate vrhova poliedara smještenih u dane koordinatne sustave.





a) lijevi prostorni koordinatni sustav

A _____

B _____

C _____

D _____

E _____

F _____

G _____

H _____

I _____

b) desni prostorni koordinatni sustav

A _____

B _____

C _____

D _____

E _____

F _____

G _____

H _____

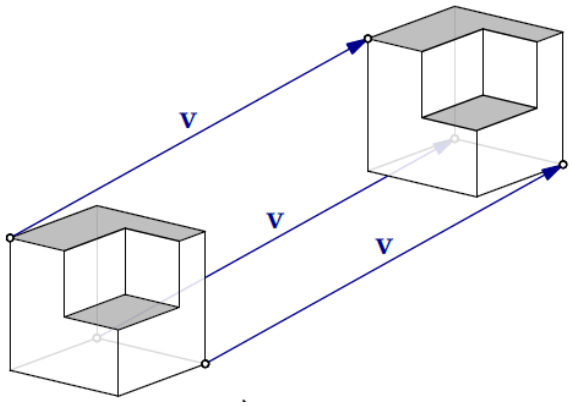
I _____

TRANSFORMACIJE PROSTORA

Iako se pojedine transformacije prostora imenuju na isti način kao i srodne transformacije ravnine, transformacije ravnine i prostora mogu se razlikovati po načinu zadavanja i svojstvima. Prisjetimo se samo nekih izometrija prostora.

- TRANSLACIJA (POMAK)

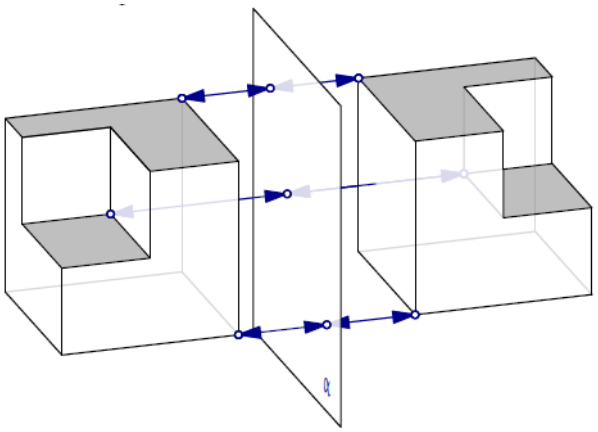
  Zadajemo pomoću **vektora pomaka** $\vec{v} = \overrightarrow{TT'}$.



- ZRCALNA SIMETRIJA (ZRCALJENJE)

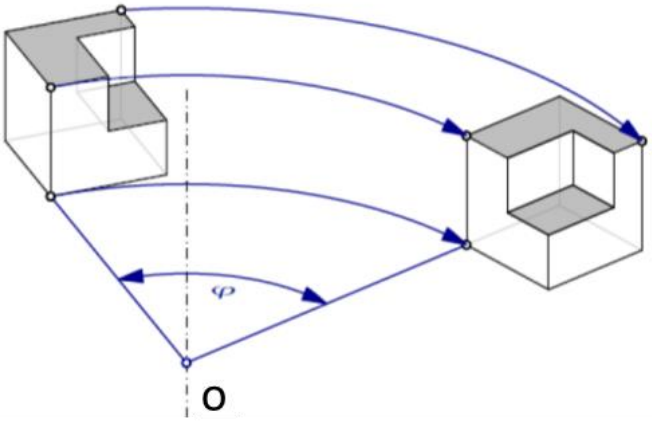
  Zrcaljenje u prostoru zadajemo **ravninom simetrije** α. Zrcalna slika točke T, točka T', se dobije postavljanjem okomice na os *o* i određivanjem nožišta N. Točka T' leži na pravcu NT i vrijedi $|TN| = |T'N|$.

  Čvrsti elementi preslikavanja su sve točke ravnine simetrije, svi pravci ravnine simetrije, ravnina simetrije, te svi pravci i ravnine okomiti na ravninu simetrije.

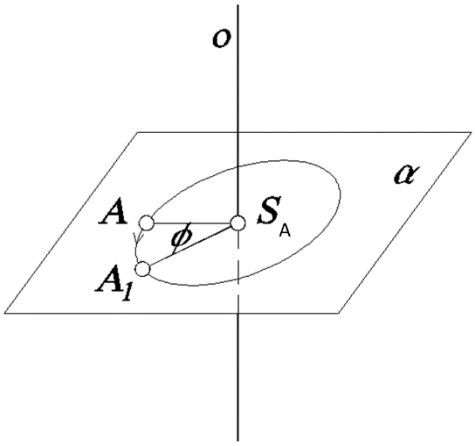


- ROTACIJA

  Rotacija se zadaje **osi rotacije** o i **kutom rotacije** φ. Oznaka: (o, φ). Rotacija općenito nema čvrstih elemenata, osim ako je kut rotacije $360°$ ili neki njegov višekratnik. U tom slučaju riječ je o identiteti.



SLIKA 39 ROTACIJA OKO OSI o



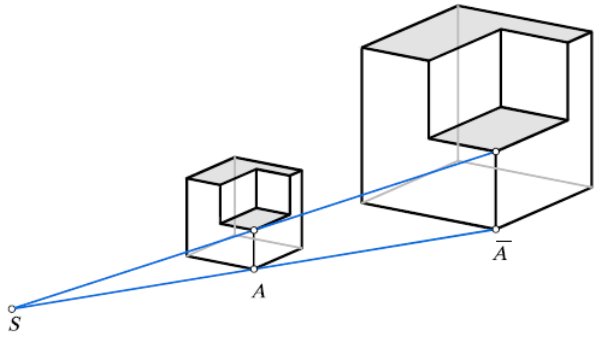
Napomena: Slika točka A, točka A_1, u rotaciji oko osi o određuje se primjenom rotacije u ravnini α točke A okomitoj na os rotacije o. Središte rotacije S_A je pritom probodište osi rotacije o s ravninom rotacije α.

- HOMOTETIJA

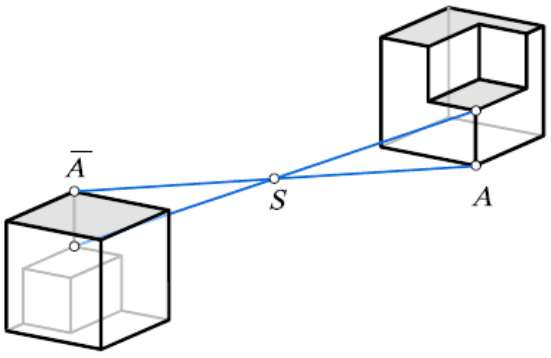
  Homotetija se zadaje **središtem homotetije S** i **koeficijentom homotetije** λ (realnim brojem $\lambda \neq 0$). Slika točke A, točka $\overline{A}$, se određuje na zraci $S\overline{A}$ pri čemu vrijedi

  $$|S\overline{A}| = |\lambda| \cdot |SA|.$$

  Ukoliko je koeficijent $|\lambda| < 1$ udaljenosti među točkama se smanjuju, a za $|\lambda| < 1$ povećavaju.



SLIKA 40 HOMOTETIJA



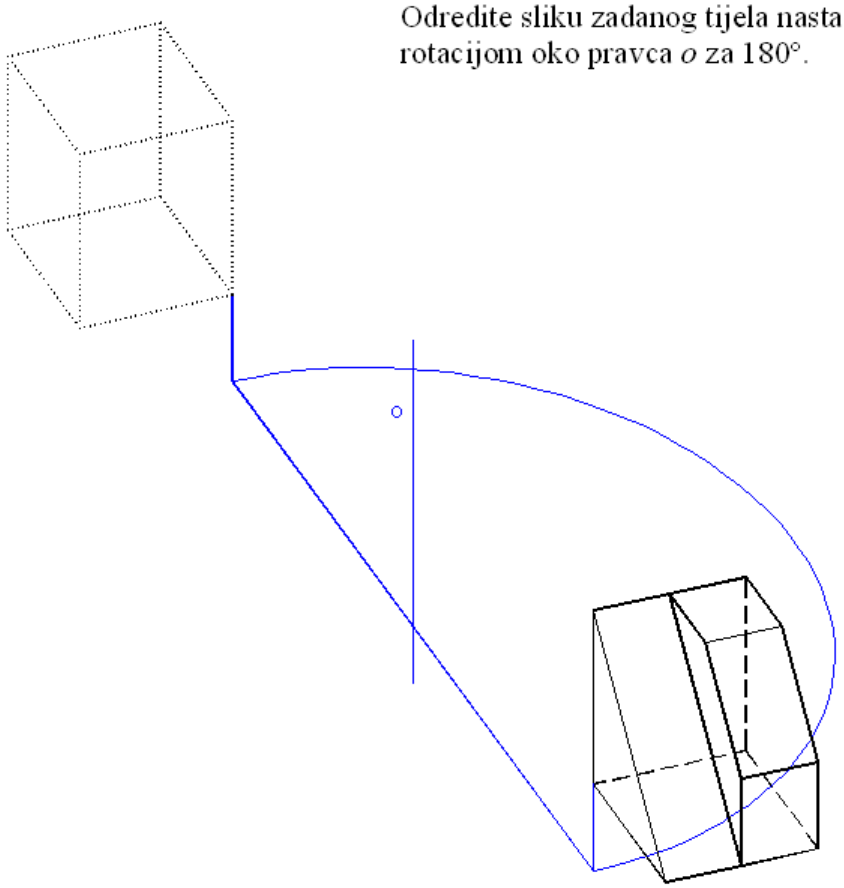
SLIKA 41 CENTRALNA SIMETRIJA

Homotetija je izometrija jedino u dva slučaja.

- $\lambda = 1$, identično preslikavanje,
- $\lambda = -1$, centralna simetrija.

Zadatak 15.

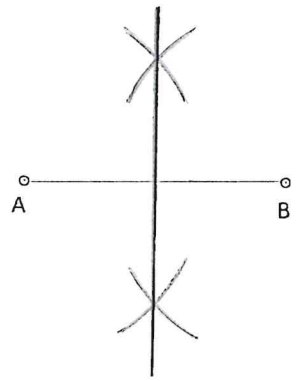
Odredite sliku zadanog tijela nastalu rotacijom oko pravca *o* za 180°.



RJEŠENJA

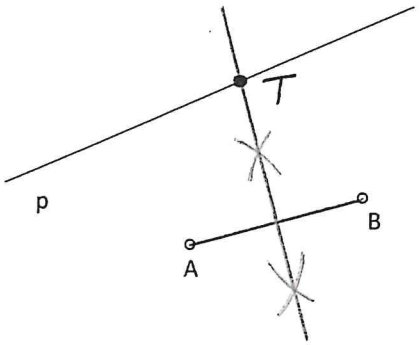
Zadatak 1.

Zadana je dužina AB. Odredi simetralu dane dužine.



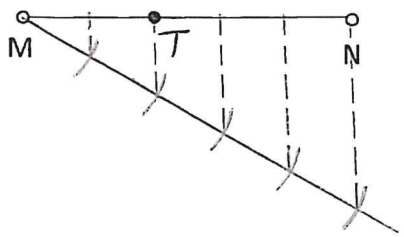
Zadatak 2.

Na danom pravcu p odredi točku T koja je jednako udaljena od točaka A, B.



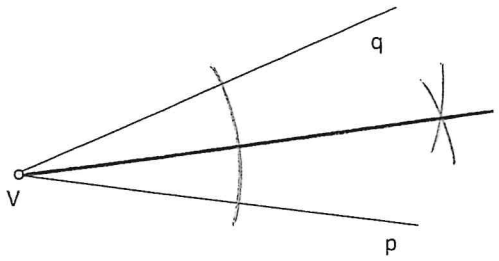
Zadatak 3.

Danu dužinu $\overline{MN}$ podijeli u omjeru 2:3.



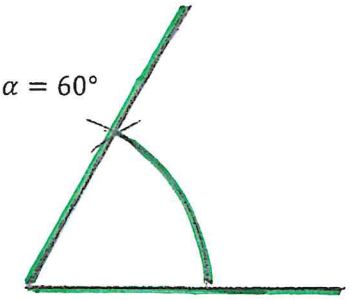
Zadatak 4.

Za dani kut određen polupravcima p, q konstruiraj njegovu simetralu.



Primjer. Koristeći samo ravnalo i šestar izvedi sljedeće konstukcije kuta α.

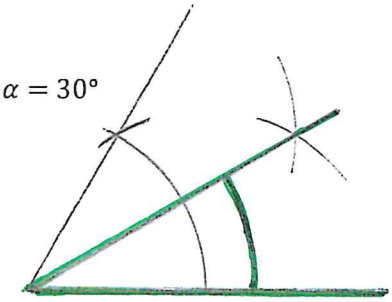
$\alpha = 60°$



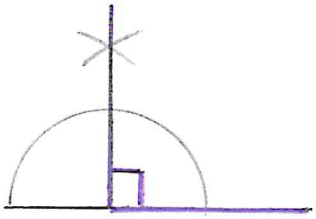
$\alpha = 120°$



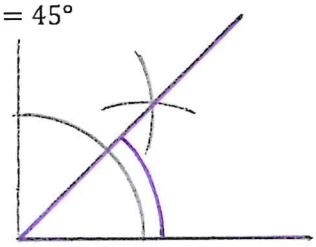
$\alpha = 30°$



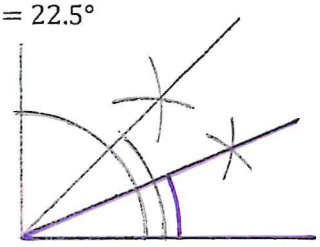
$\alpha = 90°$



$\alpha = 45°$

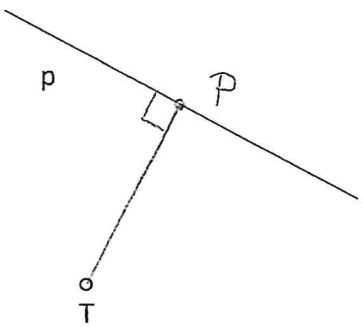


$\alpha = 22.5°$



Zadatak 5.

Neka je dan pravac p i točka T. Odredi udaljenost točke T od pravca p.



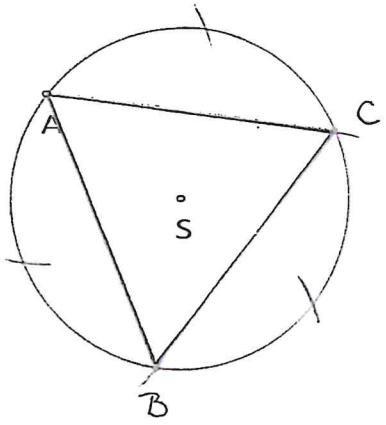
$$d(T,p) = d(T,P) = 2.7\,cm$$

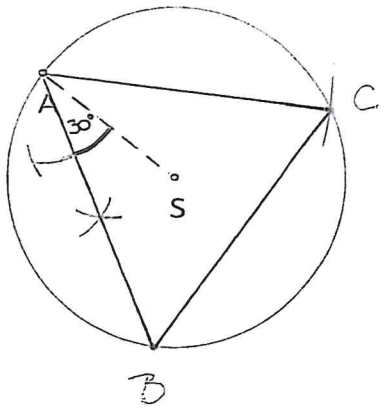
Zadatak 6.

Konstruiraj pravilni mnogokut zadan brojem stranica *n* te:

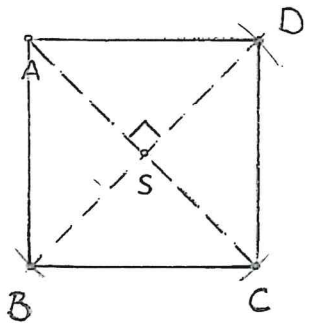
a) vrhom *A* i središtem mnogokuta *S*.

n=3





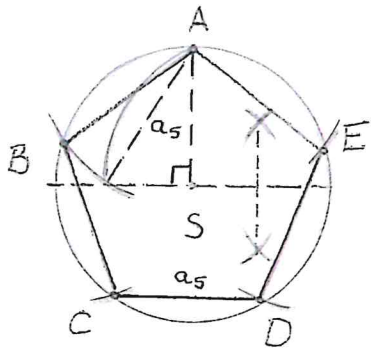
n = 4



Uoči:

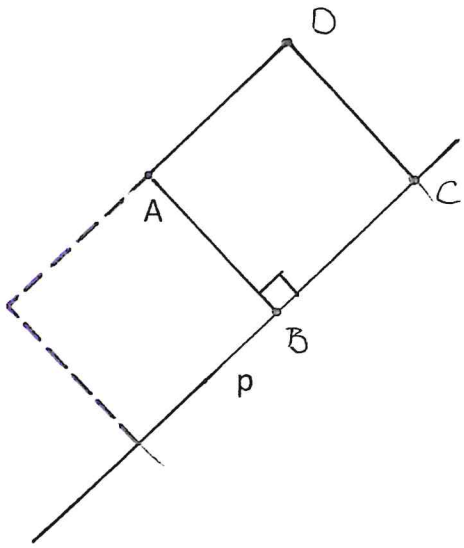
Dijagonale kvadrata sijeku se pod pravim kutom.

n = 5



b) odnosima među danim objektima.

n = 4
jedna stranica leži na pravcu p, a jedan vrh je u točki A.



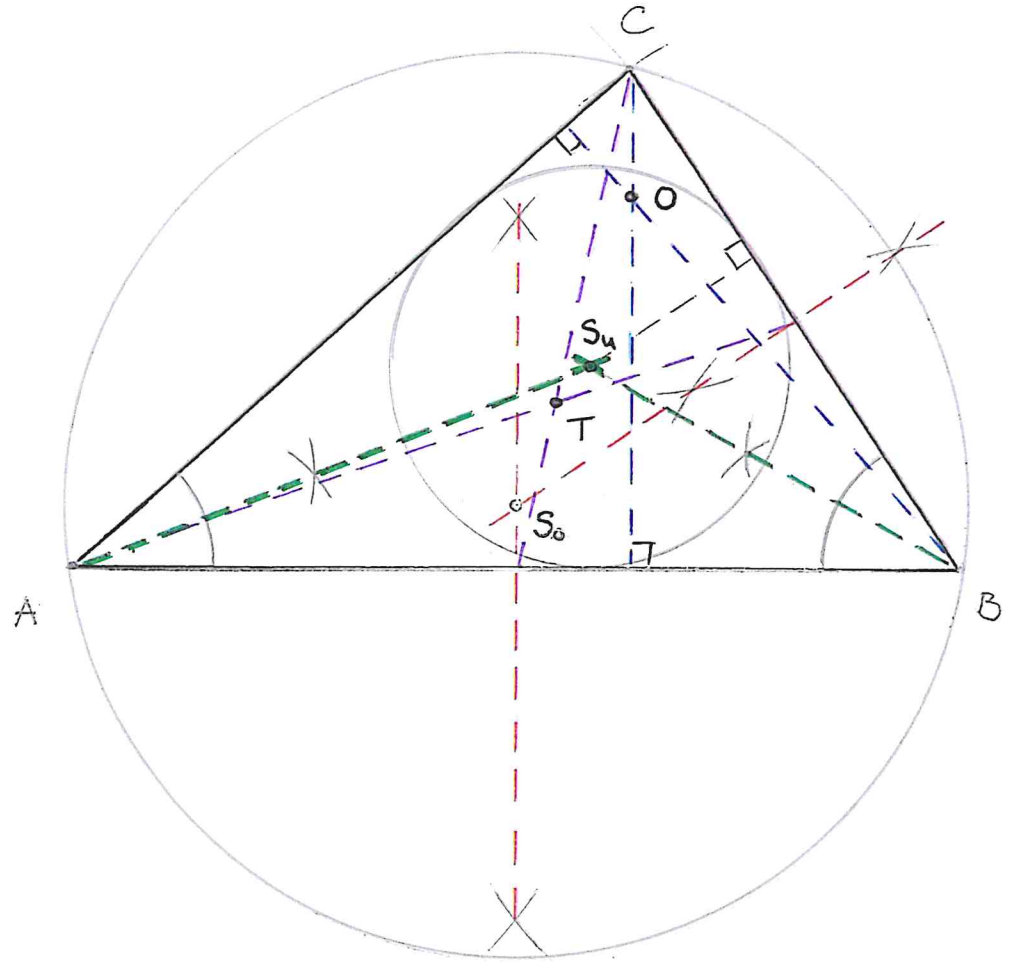
Napomena: Uoči da rješenje nije jedinstveno.

Zadatak 7.

Četiri karakteristične točke trokuta

1. *središte opisane kružnice* – točka u kojoj se sijeku simetrale stranica trokuta
2. *središte upisane kružnice* – točka u kojoj se sijeku simetrale unutarnjih kutova trokuta
3. *težište* – točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.
4. *ortocentar* – točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta. Visina trokuta je dužina povučena okomito na stranicu iz nasuprotnog vrha.

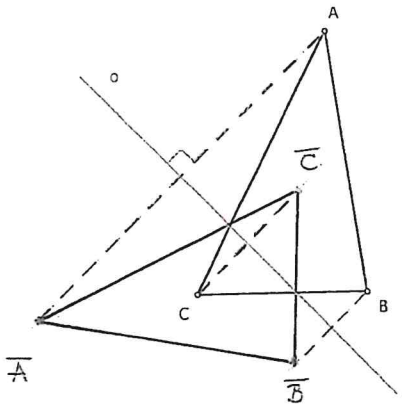
Konstruiraj trokut ABC duljina stranica a = 12 cm, b = 10 cm, c = 8 cm. Odredi sve četiri karakteristične točke trokuta ABC.



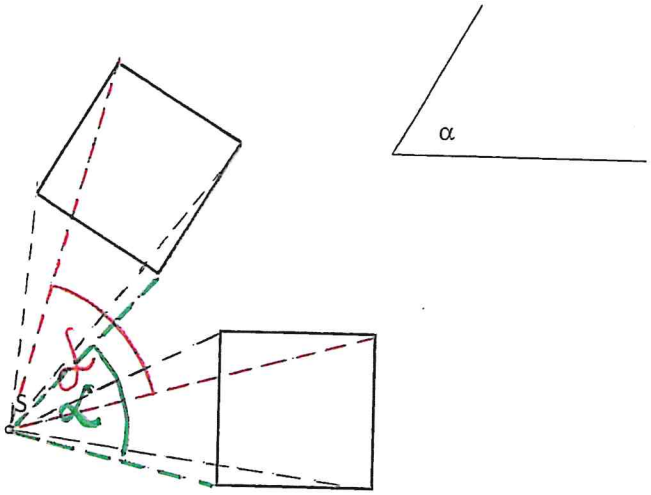
Zadatak 8.

Geometrijske transformacije.

a) Neka je zadana os simetrije o. Konstruiraj osnosimetričnu sliku danog trokuta ABC.

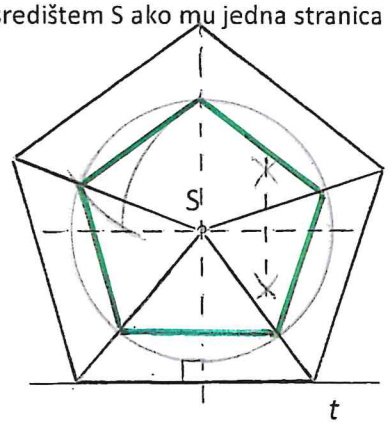


b) Neka je zadano središte S rotacije i kut α. Odredi sliku danog kvadrata nakon rotacije (S, α).



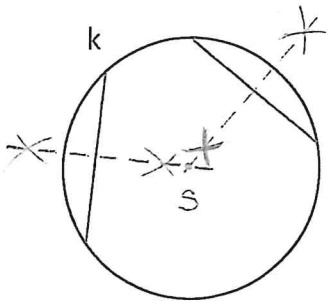
Zadatak 9.

Konstruiraj pravilni peterokut zadan središtem S ako mu jedna stranica leži na pravcu p.



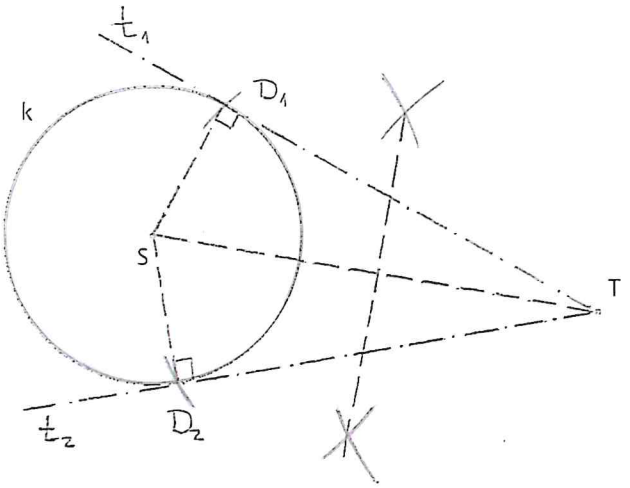
Zadatak 10.

a) Odredi središte dane kružnice k.



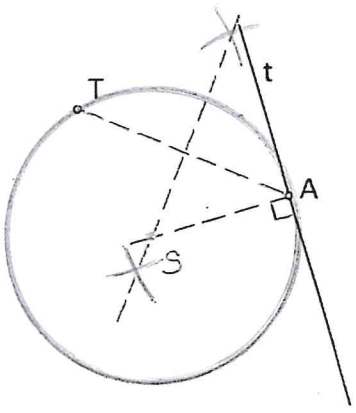
---

b) Konstruiraj tangente povučene iz točke T na danu kružnicu.



---

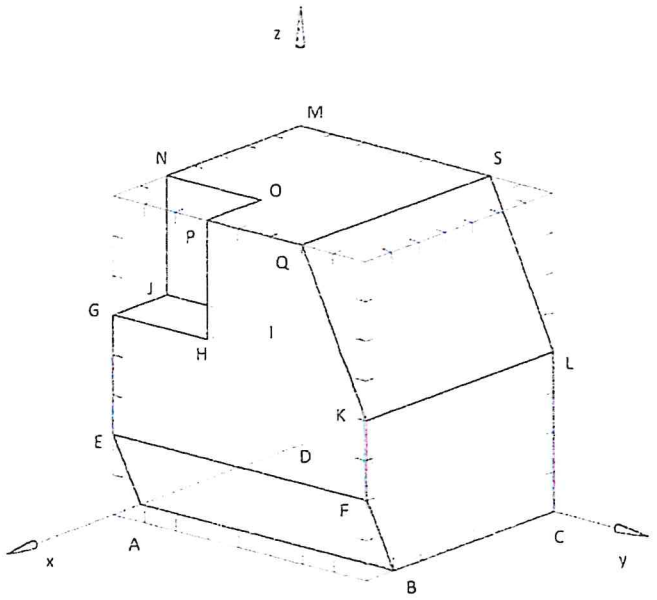
c) Konstruiraj kružnicu *k* koja prolazi kroz točku T i dodiruje tangentu *t* u točki A.



Zadatak 11.

Promotri dani objekt i provjeri jesu li sljedeće tvrdnje točne (T) ili netočne (N).

	T	N
a) Dužina HP je paralelna s ravninom BCL.	✓	
b) Pravac AE leži koso prema ravnini CDM.	✓	
c) Dužine AB i SL međusobno su paralelne.		✓
d) Pravci HP i KQ su mimosmjerni.		✓
e) Ravnine HPQ i CDS međusobno su paralelne.	✓	
f) Pravac GH je paralelan s ravninom AEF.	✓	
g) Pravac GH je paralelan s pravcem OS.		✓
h) Pravac CK je paralelan s ravninom GJN.	✓	
i) Pravci CK i BF su mimosmjerni.		✓
j) Ravnine CDM i GHP međusobno su paralelne.	✓	
k) Ravnina KLS paralelna je s x-osi.	✓	
l) Pravac QS paralelan je s x-osi.	✓	



Zadatak 12.

Promotri dani objekt i nadopuni sljedeće rečenice:

a) Ortogonalna projekcija točke K na ravninu EFG je točka I.

b) Ortogonalna projekcija točke A na pravac EF je točka E.

c) Ortogonalna projekcija pravca FG na ravninu CDG je točka G.

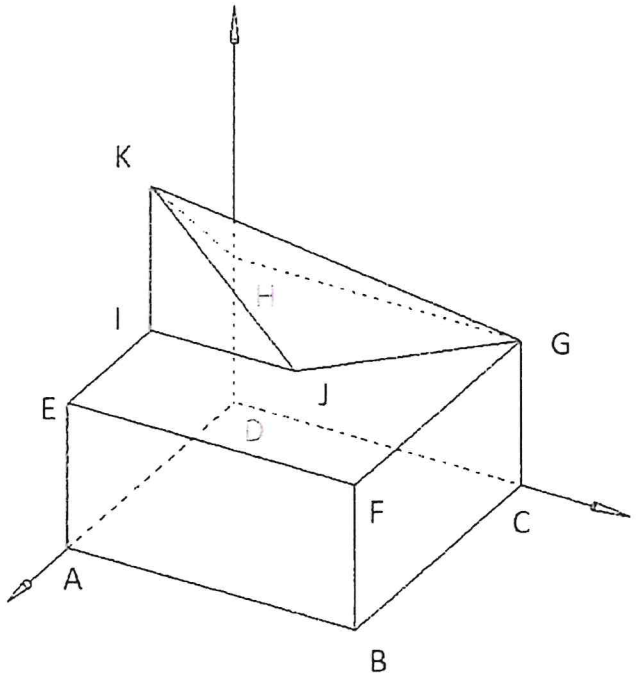
d) Ortogonalna projekcija pravca FG na ravninu ABC je pravac BC.

e) Ortogonalna projekcija pravca KJ na ravninu EFG je pravac IJ.

f) Ortogonalna projekcija ravnine ABF na ravninu ABC je pravac AB.

g) Ortogonalna projekcija ravnine ABF na ravninu CDG je ravnina CDG.

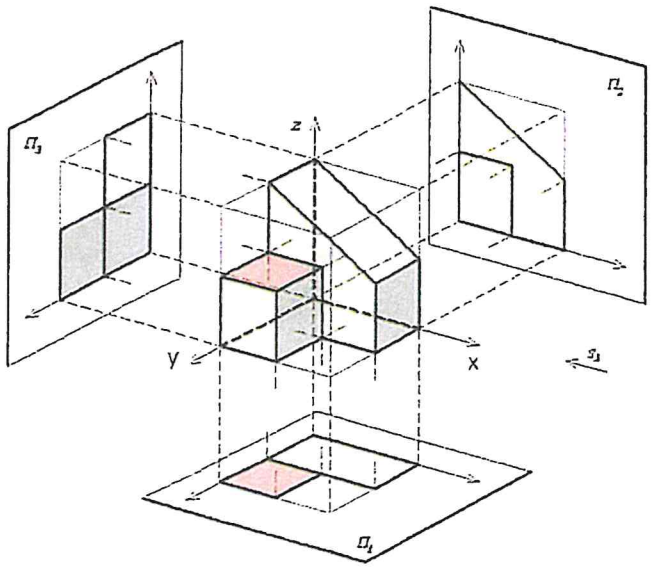
h) Ortogonalna projekcija ravnine GJK na ravninu EAD je ravnina EAD.

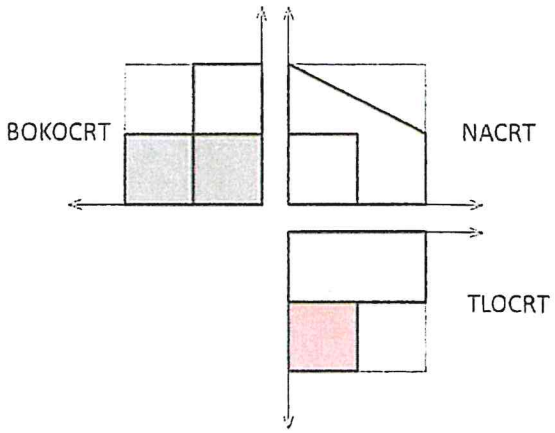


Zadatak 13. **Glavne projekcije**

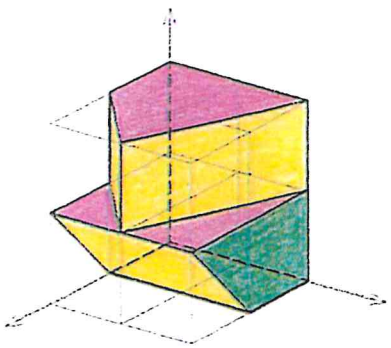
Ortogonalne projekcije prostora duž koordinatnih osi nazivaju se glavnim projekcijama.

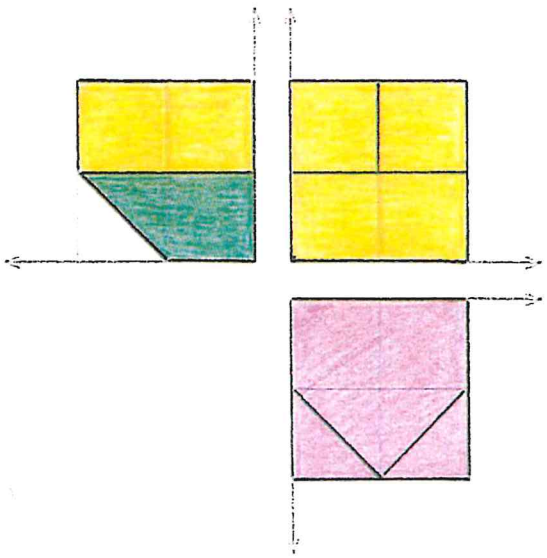
- Tlocrt – ortogonalna projekcija na ravninu Π_1 koja je ili paralena ili identična xy-ravnini.
- Nacrt – ortogonalna projekcija na ravninu Π_2 koja je ili paralena ili identična xz-ravnini.
- Bokocrt – ortogonalna projekcija na ravninu Π_3 koja je ili paralena ili identična yz-ravnini.





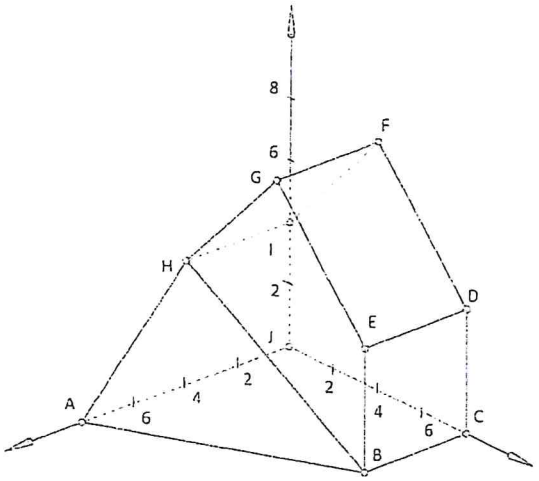
Pažljivo promotri gornji crtež i odredi glavne projekcije zadanog objekta.

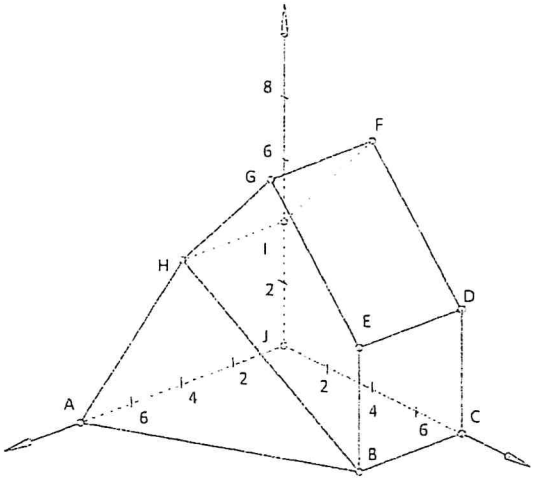




Zadatak 14.

Odredite koordinate točaka A, B, C, i D objekta smještenog u kvadar dimenzija 3 x 4 x 5:





i) u lijevom prostornom koordinatnom sustavu.

A (0,8,0)
B (8,4,0)
C (8,0,0)
D (8,0,4)
E (8,4,4)
F (4,0,8)
G (4,4,8)
H (0,4,4)
I (0,0,4)

j) u desnom prostornom koordinatnom sustavu.

A (8,0,0)
B (4,8,0)
C (0,8,0)
D (0,8,4)
E (4,8,4)
F (0,4,8)
G (4,4,8)
H (4,0,4)
I (0,0,4)

Zadatak 15.

Odredite sliku zadanog tijela nastalu rotacijom oko pravca o za $180°$.

